

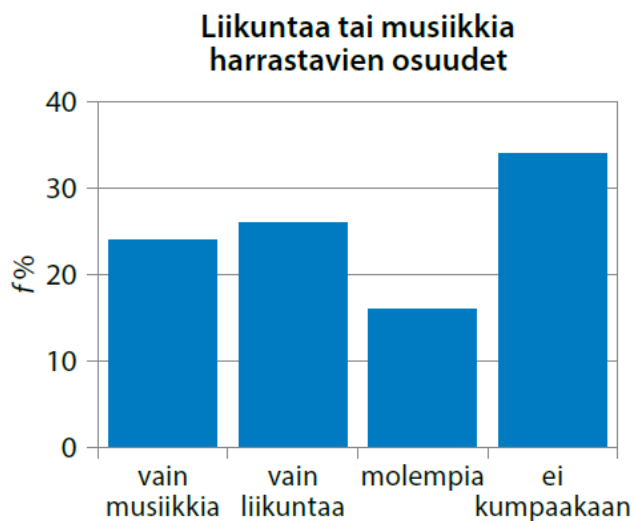
# K1

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä ratkaisussa on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmistoa.

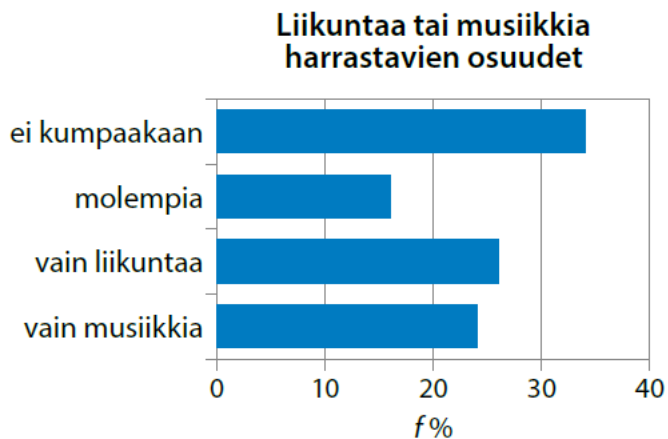
Syötetään tiedot sarakkeisiin A–B.

	A	B
1		$f\%$
2	vain musiikkia	24
3	vain liikuntaa	26
4	molempia	16
5	ei kumpaakaan	32

a) Piirretään pystypylväskuvio Ohjattu kaavion luonti – toimintoa käyttäen.



b) Piirretään vaakapylväskuvio Ohjattu kaavion luonti – toimintoa käyttäen.



c) Piirretään ympyrädiagrammi Ohjattu kaavion luonti – toimintoa käyttäen.

**Liikuntaa tai musiikkia harrastavien osuudet**



## K2

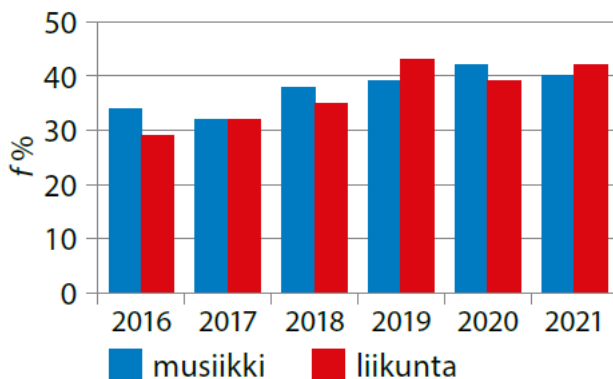
Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä ratkaisussa on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmistoa.

Syötetään tiedot sarakkeisiin A–C.

	A	B	C
1	<b>Vuosi</b>	<b>Musiikki</b>	<b>Liikunta</b>
2		<i>f%</i>	<i>f%</i>
3	2016	34	29
4	2017	32	32
5	2018	38	35
6	2019	39	43
7	2020	42	39
8	2021	40	42

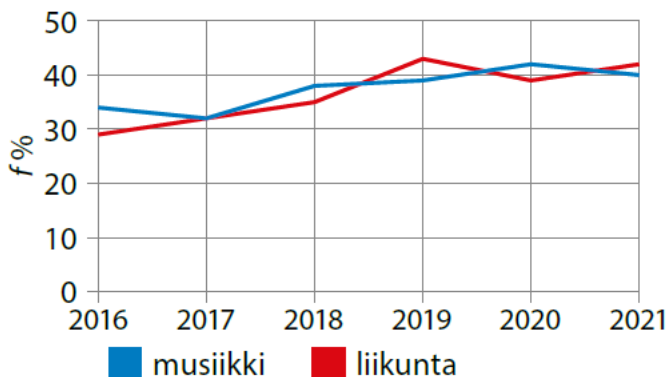
a) Piirretään pystypylväskuvio Ohjattu kaavion luonti – toimintoa käyttäen.

**Liikuntaa tai musiikkia harrastavien osuudet**



b) Piirretään viivadiagrammi Ohjattu kaavion luonti – toimintoa käyttäen.

**Liikuntaa tai musiikkia harrastavien osuudet**



c) Vastaukset eivät ole saman kokonaisuuden osuuksia, vaan jokainen vastaus kuvaa kyseisenä vuonna kyseistä lajia harrastaneiden osuutta kunkin vuoden vastaajista. Suhteellisten frekvenssien summa on yli 100 %.

## K3

Käyntitiheys	<i>f</i> %
vähintään kahdesti viikossa	3
kerran viikossa	7
pari kertaa kuukaudessa	14
kerran kuukaudessa	29
harvemmin	47

Taulukon perusteella yleisin havaintoarvo on harvemmin. Käyntitiheyden moodi on siis harvemmin kuin kerran kuukaudessa.

Mediaani jakaa suuruusjärjestykseen asetut havaintoarvot kahteen yhtä suureen osaan. Suhteellinen summafrekvenssi ylittää 50 % luokassa kerran kuukaudessa. Käyntitiheyden mediaani on siis kerran kuukaudessa.

### Vastaus

moodi: harvemmin kuin kerran kuukaudessa,  
mediaani: kerran kuukaudessa

## K4

- a) Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä ratkaisussa on käytetty LibreOffice Calc -ohjelmistoa. Lasketaan pyydetty tunnusluvut taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B	C	D	E
1		<b>Päätötodistus</b>		Pienin arvo	'=MIN(B2:B8)
2	Amanda	9		Suurin arvo	'=MAKS(B2:B8)
3	Birgitta	8		Mediaani	'=MEDIAANI(B2:B8)
4	Carolina	9		Keskiarvo	'=KESKIARVO(B2:B8)
5	Daniel	7		Keskihajonta	'=KESKHAJONTA.S(B2:B8)
6	Elias	9		Moodi	'=MOODI.USEA(B\$2:B\$8)
7	Fanni	8			
8	Greta	7			

Luetaan arvot taulukosta.

D	E
Pienin arvo	7
Suurin arvo	9
Mediaani	8
Keskiarvo	8,14
Keskihajonta	0,90
Moodi	9

Moodi on 9, mediaani 8 ja keskiarvo 8,14.

Vaihteluvälin pituus on  $9 - 7 = 2$  ja keskihajonta 0,90.

- b) Yleisin havaintoarvo on M. Ylioppilastodistuksen ruotsin arvosanan moodi on M.

Asetetaan arvosanat jonoon parhaimmasta huonoimpaan.

L E M M M C B

4. arvosana on M, joten arvosanojen mediaani on M.

Ylioppilastodistuksen arvosanat eivät ole lukuja, joten keskiarvoa tai keskihajontaa ei voi laskea.

### Vastaus

- a) moodi 9, mediaani 8, keskiarvo 8,14; vaihteluvälin pituus 2, keskihajonta 0,90  
b) moodi M, mediaani M

## K5

- a) Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Helsinkiin liittyvät havaintoarvot vuosilta 1920–2020 ovat laskentataulukon soluissa B23–B123.

	A	B	C	D	E
1	<b>Heinäkuun keskilämpötila (°C)</b>		<b>Vuodet 1920-2020</b>		
2	<b>Vuosi</b>	<b>Helsinki</b>	<b>Sodankylä</b>	Mediaani	'=MEDIAANI(B23:B123)
3	1900	15,6		Keskiarvo	'=KESKIARVO(B23:B123)
4	1901	20,0		Keskihajonta	'=KESKIHAJONTA.S(B23:B123)
5	1902	13,9		Moodi	'=MOODI.USEA(B\$23:B\$123)
6	1903	16,2			

Luetaan arvot taulukosta (havaintoarvot jatkuvat riville 123 asti).

	A	B	C	D	E
1	<b>Heinäkuun keskilämpötila (°C)</b>		<b>Vuodet 1920-2020</b>		
2	<b>Vuosi</b>	<b>Helsinki</b>	<b>Sodankylä</b>	Mediaani	17,50
3	1900	15,6		Keskiarvo	17,59
4	1901	20,0		Keskihajonta	1,66
5	1902	13,9		Moodi	17,20
6	1903	16,2			18,60
7	1904	14,2			17,90
8	1905	16,6			16,30
9	1906	18,2			17,50

Vuosina 1920–2020 Helsingissä moodeja olivat 16,3 °C, 17,2 °C, 17,5 °C, 17,9 °C ja 18,6 °C.

Mediaani oli 17,5 °C.

Keskiarvo oli 17,59 °C ja keskihajonta 1,66 °C.

- b) Sodankylään liittyvät havaintoarvot vuosilta 1920–2020 ovat laskentataulukon soluissa C23–C123.

	A	B	C	D	E
1	<b>Heinäkuun keskilämpötila (°C)</b>		<b>Vuodet 1920-2020</b>		
2	<b>Vuosi</b>	<b>Helsinki</b>	<b>Sodankylä</b>	Mediaani	'=MEDIAANI(C23:C123)
3	1900	15,6		Keskiarvo	'=KESKIARVO(C23:C123)
4	1901	20,0		Keskihajonta	'=KESKIHAJONTA.S(C23:C123)
5	1902	13,9		Moodi	'=MOODI.USEA(C\$23:C\$123)

Luetaan arvot taulukosta (havaintoarvot jatkuvat riville 123 asti).

	A	B	C	D	E
1	<b>Heinäkuun keskilämpötila (°C)</b>			<b>Vuodet 1920-2020</b>	
2	<b>Vuosi</b>	<b>Helsinki</b>	<b>Sodankylä</b>	Mediaani	15
3	1900	15,6		Keskiarvo	15
4	1901	20,0		Keskihajonta	2
5	1902	13,9		Moodi	14,40
6	1903	16,2			14,60

Vuosina 1920–2020 Sodankylässä moodeja olivat 14,4 °C ja 14,6 °C.

Mediaani oli 14,5 °C.

Keskiarvo oli 14,65 °C ja keskihajonta 1,82 °C.

### Vastaus

- a) moodit 16,3 °C, 17,2 °C, 17,5 °C, 17,9 °C ja 18,6 °C,  
mediaani 17,5 °C,  
keskiarvo 17,6 °C,  
keskihajonta 1,66 °C
- b) moodit 14,4 °C ja 14,6 °C  
mediaani 14,5 °C  
keskiarvo 14,6 °C  
keskihajonta 1,82 °C

## K6

27 opiskelijan ryhmässä kokeen keskiarvo oli 6,95 ja 24 opiskelijan ryhmässä 7,54 . Lasketaan osallistujamäärien avulla kaikkien kokeeseen osallistuneiden keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{27 \cdot 6,95 + 24 \cdot 7,54}{27 + 24} \approx 7,23$$

Kokeen keskiarvo oli 7,23.

**Vastaus**

7,23



## K7

Lasketaan, kuinka moninkertainen Fransin poikkeama oli keskihajontaan verrattuna omassa ryhmässään.

$$\frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{24 - 20}{9} = \frac{4}{9} \approx 0,44$$

Fransin tulos poikkesi keskiarvosta 0,44 keskihajonnan verran alaspäin.

Lasketaan, kuinka moninkertainen Fannyn poikkeama oli keskihajontaan verrattuna omassa ryhmässään.

$$\frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{27 - 23}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$$

Fannyn tulos poikkesi keskiarvosta 0,5 keskihajonnan verran alaspäin.

Frans menestyi suhteellisesti paremmin.

### Vastaus

Frans

## K8

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A101.

Laaditaan frekvenssitaulukko sarakkeisiin B ja C.

Havaintoarvoissa esiintyy arvot 5, 6, 7, 8, 9 ja 10. Kirjoitetaan ne sarakkeeseen B.

Lasketaan soluun C2 havaintoarvon 5 frekvenssi ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa alaspäin.

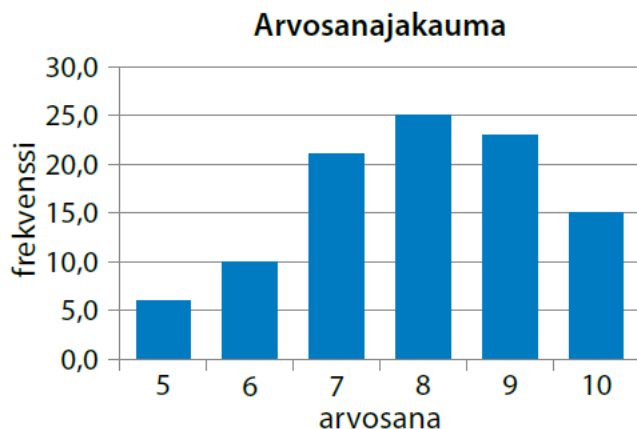
Lasketaan lopuksi frekvenssien summa soluun C8.

	A	B	C
1	<b>Arvosanat</b>	<b>Arvosana</b>	<b><math>f</math></b>
2	8	5	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B2)
3	10	6	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B3)
4	7	7	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B4)
5	6	8	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B5)
6	5	9	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B6)
7	10	10	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$101;B7)
8	9	<b>Yhteensä</b>	'=SUMMA(C2:C7)

Arvosanojen absoluuttinen jakauma on sarakkeissa B ja C.

	A	B	C
1	<b>Arvosanat</b>	<b>Arvosana</b>	<b><math>f</math></b>
2	8	5	6
3	10	6	10
4	7	7	21
5	6	8	25
6	5	9	23
7	10	10	15
8	9	<b>Yhteensä</b>	100

Piirretään pylväskuvio.



## K9

Ratkaistaan tunnusluvut GeoGebran taulukkolaskentaohjelmalla. Taulukoidaan havaintoarvot ja lasketaan suhteelliset frekvenssit.

a) Luetaan frekvenssit tilastokuvioista.

Arvosana	$f$
4	2
5	4
6	12
7	10
8	5
9	3
10	0
<b>Yhteensä</b>	<b>36</b>

b) Lasketaan suhteelliset frekvenssit absoluuttisten frekvenssien avulla.

Arvosana	$f\%$
4	6
5	11
6	33
7	28
8	14
9	8
10	0
<b>Yhteensä</b>	<b>100</b>

Lasketaan sitten tunnusluvut.

GeoGebra 5 -ohjelmalla tilastolliset tunnusluvut saa laskettua aineistosta **Yhden muuttujan analyysi** -työkalun avulla. Valitaan **Data ja frekvenssi** -vaihtoehto, jolloin puoltoäänät syötetään **Data**-sarakkeeseen.

**Data-analyysi**-valikosta valitaan **Näytä tilastot**.

GeoGebra 6 -ohjelmalla syötetään muuttujan arvot omaan sarakkeeseensa ja frekvenssit niiden oikealle puolelle omaan sarakkeeseensa. Maalataan alue, jolla tutkittavat arvot sijaitsevat. Valitaan **Yhden muuttujan analyysi** -toiminto. Valitaan **Näytä tilastot** -toiminto.

n	36
Keskiarvo	6.5833
$\sigma$	1.2555
s	1.2734
$\Sigma x$	237
$\Sigma x^2$	1617
Min	4
Q1	6
Mediaani	6.5
Q3	7
Max	9

- c) Keskiarvo on 6,6.
- d) Mediaani on 6,5.
- e) Arvosanan 6 frekvenssi on suurin eli moodi on 6.

**Vastaus**

- c) 6,6
- d) 6,5
- e) 6

## K10

Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Luetaan frekvenssit pylväskuviosta ja kirjoitetaan frekvenssitaulukko sarakkeisiin A ja B.

Lasketaan soluun C2 havaintoarvon 37 suhteellinen frekvenssi, ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa C alaspäin.

Ilmaistaan suhteelliset frekvenssit prosentin kymmenesosan tarkkuudella. Lasketaan lopuksi suhteellisten frekvenssien summa soluun C12.

	A	B	C
1	<b>Makeisia</b>	<b><math>f</math></b>	<b><math>f\%</math></b>
2	37	1	'=B2/\$B\$12*100
3	38	0	'=B3/\$B\$12*100
4	39	9	'=B4/\$B\$12*100
5	40	16	'=B5/\$B\$12*100
6	31	19	'=B6/\$B\$12*100
7	42	15	'=B7/\$B\$12*100
8	43	10	'=B8/\$B\$12*100
9	44	8	'=B9/\$B\$12*100
10	45	5	'=B10/\$B\$12*100
11	46	1	'=B11/\$B\$12*100
12	<b>Yhteensä</b>	<b>'=SUMMA(B2:B11)</b>	<b>'=SUMMA(C2:C11)</b>

	A	B	C
1	<b>Makeisia</b>	<b><math>f</math></b>	<b><math>f\%</math></b>
2	37	1	1,2
3	38	0	0,0
4	39	9	10,7
5	40	16	19,0
6	31	19	22,6
7	42	15	17,9
8	43	10	11,9
9	44	8	9,5
10	45	5	6,0
11	46	1	1,2
12	<b>Yhteensä</b>	<b>84</b>	<b>100</b>

# K11

- a) Käytetään apuna GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.  
Kirjoitetaan sarakkeeseen A pituusluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat.  
Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset.

	A	B	C	D
1	Pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus
2	110-114	109.5	114.5	112
3	115-119	114.5	119.5	117
4	120-124	119.5	124.5	122
5	125-129	124.5	129.5	127

Luokkakeskukset ovat 112 cm, 117 cm, 122 cm ja 127 cm.

- b) Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	Pituus	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	110-114	109.5	114.5	112	15
3	115-119	114.5	119.5	117	40
4	120-124	119.5	124.5	122	35
5	125-129	124.5	129.5	127	10

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	119
$\sigma$	4.3012
s	4.3228
$\Sigma x$	11900
$\Sigma x^2$	1417950
Min	112
Q1	117
Mediaani	117
Q3	122
Max	127

Lasten pituuksien keskiarvo on 119 cm.

- c) Käytetään apuna b-kohdan tuloksia. Keskihajonta on 4,3 cm.
- d) Luokan 115 cm–119 cm suhteellinen frekvenssi on suurin eli moodiluokka on 115 cm–119 cm.

## Vastaus

- a) 112 cm, 117 cm, 122 cm ja 127 cm  
b) 119 cm  
c) 4,3 cm  
d) 115 cm–119 cm.

## K12

- a) Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmalla. Avataan aineisto LibreOffice Calc -ohjelmistolla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A93.

Selvitetään aineiston pienin ja suurin arvo.

92	16	
93	18,7	
94	Pienin arvo	'=MIN(A3:A93)
95	Suurin arvo	'=MAKS(A3:A93)

92	16	
93	18,7	
94	Pienin arvo	12,4
95	Suurin arvo	33,5

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 10,0–14,9; 15,0–19,9; 20,0–24,9; 25,0–29,9 ja 30,0–34,9.

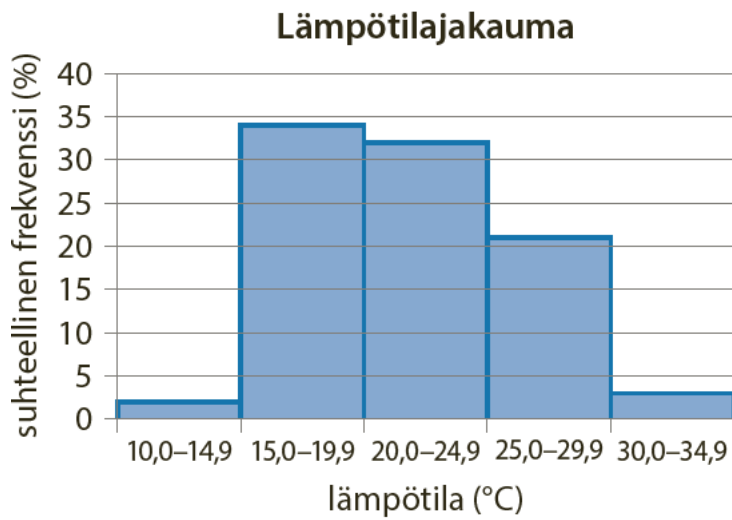
Lasketaan luokkien frekvenssit **TAAJUUS** -funktiota käyttäen.

	A	B	C	D	
1	<b>Ylin lämpötila (degC)</b>	<b>Lämpötilaluokka (degC)</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b>f</b>	
2	26,9	10,0-14,9	14,95	2	
3	23,6	15,0-19,9	19,95	34	
4	21,2	20,0-24,9	24,95	32	
5	22,3	25,0-29,9	29,95	21	
6	19,4	30,0-34,9	34,95	3	
7	15,8			0	
8	17,9				

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Lämpötila (° C)	Frekvenssi
10,0–14,9	2
15,0–19,9	34
20,0–24,9	32
25,0–29,9	21
30,0–34,9	3

b) Piirretään histogrammi **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen.





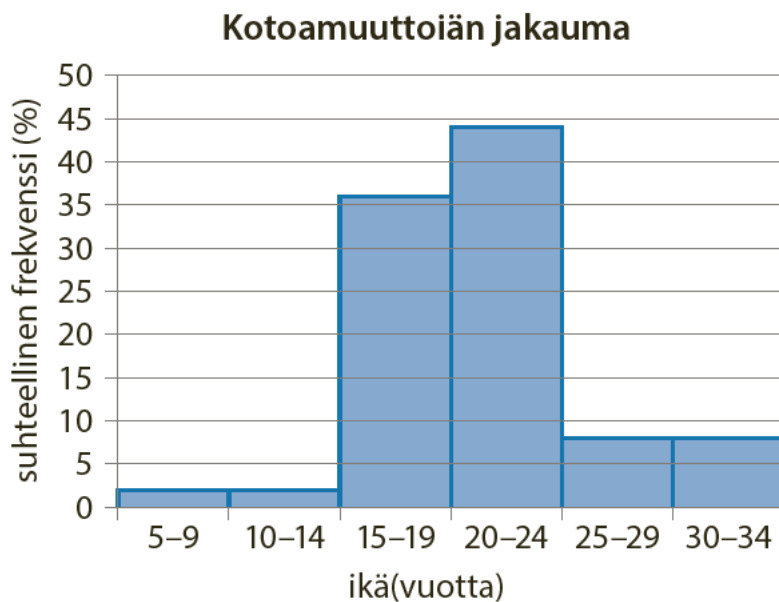
## K13

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc-ohjelmalla.

Syötetään sarakkeeseen A ikäluokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit.

	A	B
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><math>f\%</math></b>
2	5-9	2
3	10-14	2
4	15-19	36
5	20-24	44
6	25-29	8
7	30-34	8

Piirretään histogrammi **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen.



b) Luokan 20–24 suhteellinen frekvenssi on suurin eli moodiluokka on 20–24.

Käytetään keskiarvon ja keskihajonnan määrittämiseen GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Määritetään keskiarvo ja keskihajonta sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

	A	B	C	D	E
1	<b>Ikä</b>	<b>Todellinen alaraja</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b>Luokkakeskus</b>	<b>f %</b>
2	5-9	5	10	7.5	2
3	10-14	10	15	12.5	2
4	15-19	15	20	17.5	36
5	20-24	20	25	22.5	44
6	25-29	25	30	27.5	8
7	30-34	30	35	32.5	8

Saadaan seuraavat tunnusluvut.

n	100
Keskiarvo	21.4
$\sigma$	4.9285
s	4.9533
$\Sigma x$	2140
$\Sigma x^2$	48225
Min	7.5
Q1	17.5
Mediaani	22.5
Q3	22.5
Max	32.5

Kotoamuuttoiän keskiarvo on 21,4 vuotta ja keskihajonta 4,95 vuotta.

### Vastaus

b) moodiluokka 20–24, keskiarvo 20,9 vuotta, keskihajonta 4,95 vuotta

## K14

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc -ohjelman avulla.

Syötetään annetut tiedot sarakkeisiin A ja B ja lasketaan summafrekvenssit sarakkeeseen C.

	A	B	C
1	<b>Arvosana</b>	<b><i>f</i> %</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2	L	4,0	'=B2
3	E	13,9	'=C2+B3
4	M	17,4	'=C3+B4
5	C	27,1	'=C4+B5
6	B	22,2	'=C5+B6
7	A	12	'=C6+B7
8	I	3,4	'=C7+B8

	A	B	C
1	<b>Arvosana</b>	<b><i>f</i> %</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2	L	4,0	4,0
3	E	13,9	17,9
4	M	17,4	35,3
5	C	27,1	62,4
6	B	22,2	84,6
7	A	12	96,6
8	I	3,4	100,0

50 % raja ylittyy luokassa C. Mediaaniarvosana oli siis C.

- b) Kokelaat, jotka saivat vähintään arvosanan E, saivat siis arvosanan L tai arvosanan E. Summafrekvenssi arvosanan E kohdalla on 17,9 % eli vähintään arvosanan E sai 17,9 % kokelaista.
- c) Vähintään arvosanan A sai 96,6 % kokelaista. Vähennetään tästä ne kokelaat, jotka saivat paremman arvosanan kuin M eli kokelaat, jotka saivat vähintään arvosanan E.

$$96,6\% - 17,9\% = 78,7\%$$

Kokelaista 78,7 % sai arvosanan, joka oli korkeintaan M, mutta vähintään A.

### Vastaus

- a) C  
b) 17,9 %  
c) 78,7 %

# K15

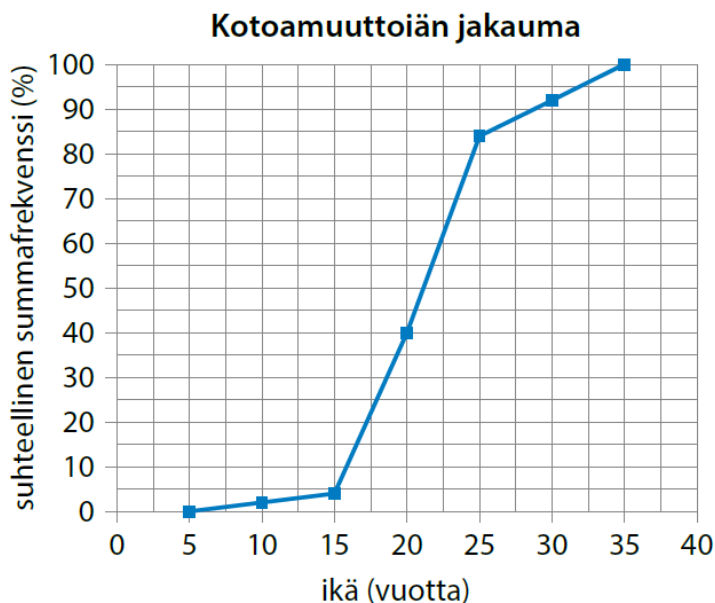
a) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc -ohjelmalla.

Syötetään tarvittavat tiedot sarakkeisiin A–C ja lasketaan suhteelliset summafrekvenssit sarakkeeseen D.

	A	B	C	D
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i> %</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2			5	0
3	5-9	2	10	'=D2+B3
4	10-14	2	15	'=D3+B4
5	15-19	36	20	'=D4+B5
6	20-24	44	25	'=D5+B6
7	25-29	8	30	'=D6+B7
8	30-34	8	35	'=D7+B8

	A	B	C	D
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i> %</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2			5	0
3	5-9	2	10	2
4	10-14	2	15	4
5	15-19	36	20	40
6	20-24	44	25	84
7	25-29	8	30	92
8	30-34	8	35	100

Piirretään kertymäkuvaaja **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen.



Arvioidaan kotoamuuttoien mediaan kertymäkuvaajasta. Kuvaaja ylittää 50 % rajan noin 21 vuode n kohdalla.

- b)** Arvioidaan ikä, jota nuorempina kotoa muutti 25 % suomalaisista. Kuvaaja ylittää 25 % rajan noin 18 vuoden kohdalla.
- c)** Arvioidaan ikä, jota vanhempina kotoa muutti 10 % suomalaisista. Kuvaaja ylittää 90 % rajan noin 29 vuoden kohdalla.

**Vastaus**

- a)** 21 vuotta
- b)** 18 vuotta
- c)** 29 vuotta

# K16

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOffice Calc -ohjelmalla.

Syötetään annetut tiedot sarakkeisiin A–B ja lasketaan summafrekvenssit sarakkeeseen C.

	A	B	C
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>
2	-17	0	0
3	18-24	74	'=C2+B3
4	25-34	56	'=C3+B4
5	35-44	38	'=C4+B5
6	45-54	19	'=C2+B3
7	55-64	10	'=C6+B7

	A	B	C
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>
2	-17	0	0
3	18-24	74	74
4	25-34	56	130
5	35-44	38	168
6	45-54	19	187
7	55-64	10	197

Lasketaan seuraavaksi suhteelliset summafrekvenssit sarakkeeseen E.

	A	B	C	D	E
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2	-17	0	0	18	0
3	18-24	74	74	25	'=C3/SC\$7*100
4	25-34	56	130	35	'=C4/SC\$7*100
5	35-44	38	168	45	'=C5/SC\$7*100
6	45-54	19	187	55	'=C6/SC\$7*100
7	55-64	10	197	65	'=C7/SC\$7*100

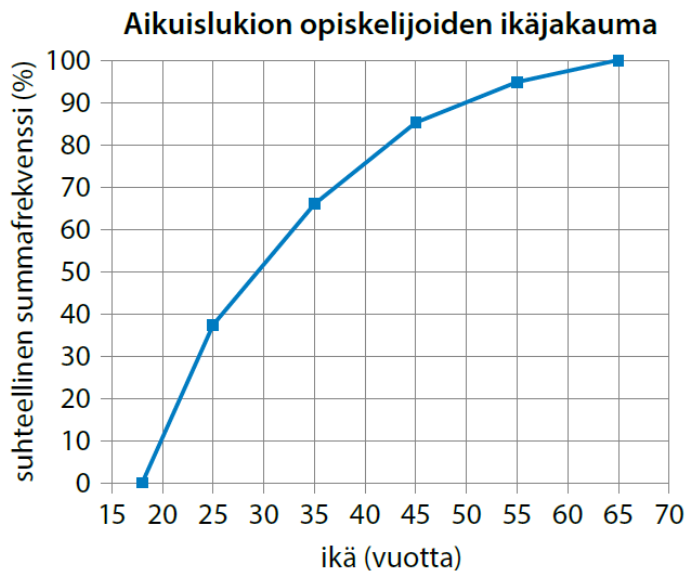
Todellinen yläraja on merkitty taulukkoon kertymäkuvaajan piirtämistä varten.

	A	B	C	D	E
1	<b>Ikä (vuotta)</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><i>sf</i> %</b>
2	-17	0	0	18	0
3	18-24	74	74	25	37,6
4	25-34	56	130	35	66,0
5	35-44	38	168	45	85,3
6	45-54	19	187	55	94,9
7	55-64	10	197	65	100,0

Taulukko summafrekvensseistä ja suhteellisista summafrekvensseistä:

ikä (vuotta)	<i>sf</i>	<i>sf</i> %
18–24	74	37,6
25–34	130	66,0
35–44	168	85,3
45–54	187	94,9
55–64	197	100,0

b) Piirretään kertymäkuvaaja **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen.



## K17

- a) Hajontakuvioon voidaan sovittaa nousevat suora, joten kyseessä on positiivinen lineaarinen riippuvuus. Pisteet sopivat suoralle hyvin, joten kyseessä on voimakas lineaarinen riippuvuus. Vastausvaihtoehdot 1 positiivinen lineaarinen riippuvuus, 3 voimakas riippuvuus ja 4 voimakas lineaarinen riippuvuus sopivat kuvioon.
- b) Hajontakuvioon voidaan sovittaa laskeva suora, joten kyseessä on negatiivinen lineaarinen riippuvuus. Pisteet sopivat suoralle hyvin, joten kyseessä on voimakas lineaarinen riippuvuus. Vastausvaihtoehdot 2 negatiivinen lineaarinen riippuvuus, 3 voimakas riippuvuus ja 4 voimakas lineaarinen riippuvuus sopivat kuvioon.
- c) Hajontakuvioon pisteet eivät sovi suoralle, joten hajontakuvio ei kuvaa lineaarista riippuvuutta. Pisteet sopivat kuitenkin hyvin kaarevalle käyrälle, joten hajontakuvio kuvaa voimakasta riippuvuutta. Vastausvaihtoehto 3 voimakas riippuvuus sopii kuvioon
- d) Hajontakuvioon pisteet eivät sovi suoralle, joten hajontakuvio ei kuvaa lineaarista riippuvuutta. Pisteet eivät myöskään sovi muulle käyrälle vaan hajoavat satunnaisesti koordinaatistoon. Vastausvaihtoehto 5 ei riippuvuutta sopii kuvioon

### Vastaus

- a) 1, 3, 4
- b) 2, 3, 4
- c) 3
- d) 5



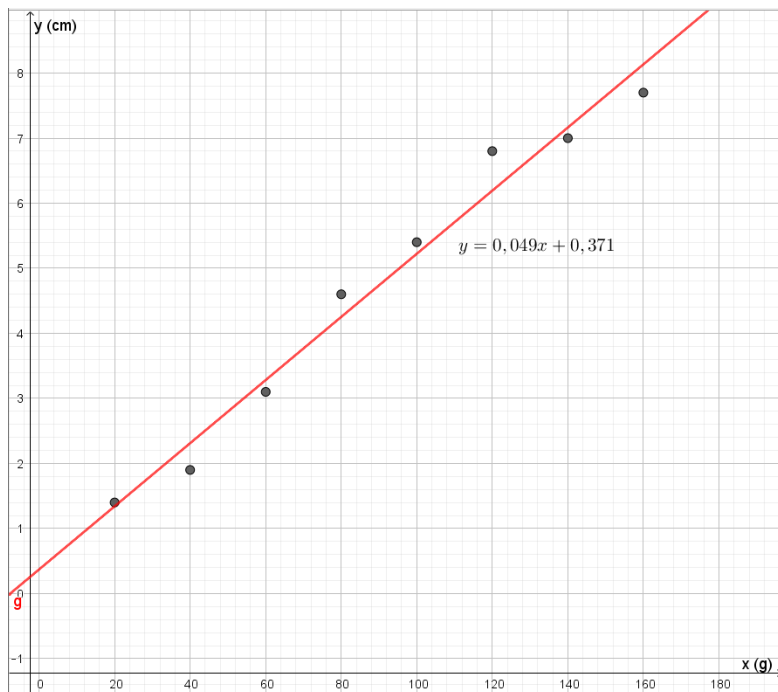
## K18

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Valitaan selittäväksi muuttujaksi  $x$  massa (g) ja selitettäväksi muuttujaksi  $y$  venymä (cm). Taulukoidaan havaintoarvot.

	A	B
1	Massa $x$ (g)	Venymä $y$ (cm)
2	20	1.4
3	40	1.9
4	60	3.1
5	80	4.6
6	100	5.4
7	120	6.8
8	140	7
9	160	7.7

Piirretään hajontakuvio ja määritetään korrelaatiokerroin ja regressiosuoran yhtälö.



KeskiarvoX	90
KeskiarvoY	4.7375
Sx	48.9898
Sy	2.4047
r	0.9883
p	1
Sxx	16800
VarianssiY	40.4788
Sxy	815
R <sup>2</sup>	0.9767
SSE	0.9415

Korrelaatiokerroin  $r \approx 0,99$  ja regressiosuoran yhtälö on  $y = 0,049x + 0,371$ .

Hajontakuvion ja korrelaatiokertoimen perusteella massan ja venymän välillä on voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus: massan kasvaessa myös venymä kasvaa.

b) Lasketaan venymä  $y$ , kun massa  $x = 130$  (g).

$$\begin{aligned}
 y &= 0,049x + 0,371 && \text{Sijoitetaan } x = 130. \\
 &= 0,049 \cdot 130 + 0,371 \\
 &\approx 6,7 \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

Lasketaan venymä  $y$ , kun massa  $x = 0$  (g).

$$\begin{aligned}
 y &= 0,049x + 0,371 && \text{Sijoitetaan } x = 0. \\
 &= 0,049 \cdot 0 + 0,371 \\
 &\approx 0,4 \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

Venymiksi saadaan 6,7 cm ja 0,4 cm.

c) Pelkän korrelaatiokertoimen perusteella regressiomalli ja sen ennusteet vaikuttavat luotettavilta havaintoarvojen vaihteluvälillä 20 g–160 g. Mittaustuloksissa lienee jokin systemaattinen virhe, sillä jousen venymä ei voi olla 0,4 cm, kun kuorman massa on nolla.

### Vastaus

a)  $r \approx 0,99$ ;  $y = 0,049x + 0,371$ , voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus

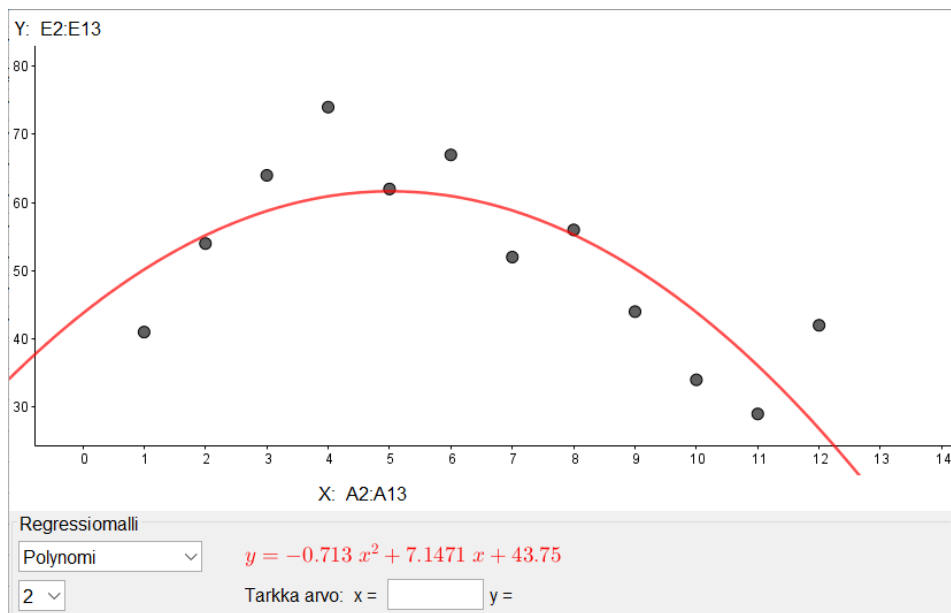
b) 6,7 cm ja 0,4 cm

c) Pelkän korrelaatiokertoimen perusteella regressiomalli ja sen ennusteet vaikuttavat luotettavilta havaintoarvojen vaihteluvälillä 20 g–160 g. Mittaustuloksissa lienee jokin systemaattinen virhe, sillä jousen venymä ei voi olla 0,4 cm, kun kuorman massa on nolla.

## K19

- a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Avataan aineisto GeoGebralla. Valitaan selittäväksi muuttujaksi  $x$  kuukausi ja selitettäväksi muuttujaksi  $y$  otsonipitoisuus.

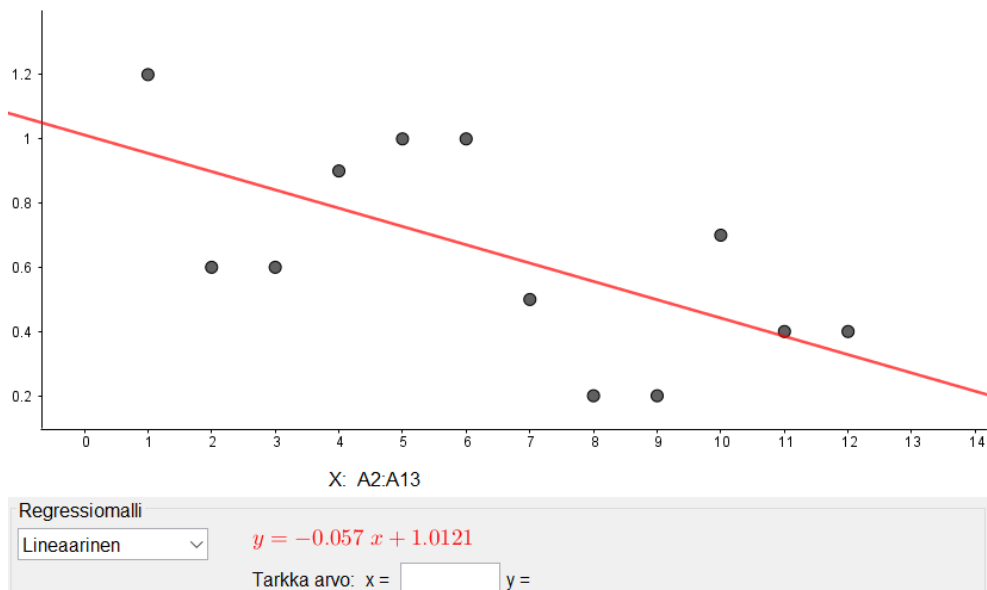
Piirretään hajontakuvi.



Hajontakuvion perusteella kuukauden ja otsonipitoisuuden välillä on epälineaarinen riippuvuus.

- b) Valitaan nyt selittäväksi muuttujaksi  $x$  kuukausi ja selitettäväksi muuttujaksi  $y$  rikkidioksidipitoisuus.

Piirretään hajontakuvi ja määritetään korrelaatiokerroin.



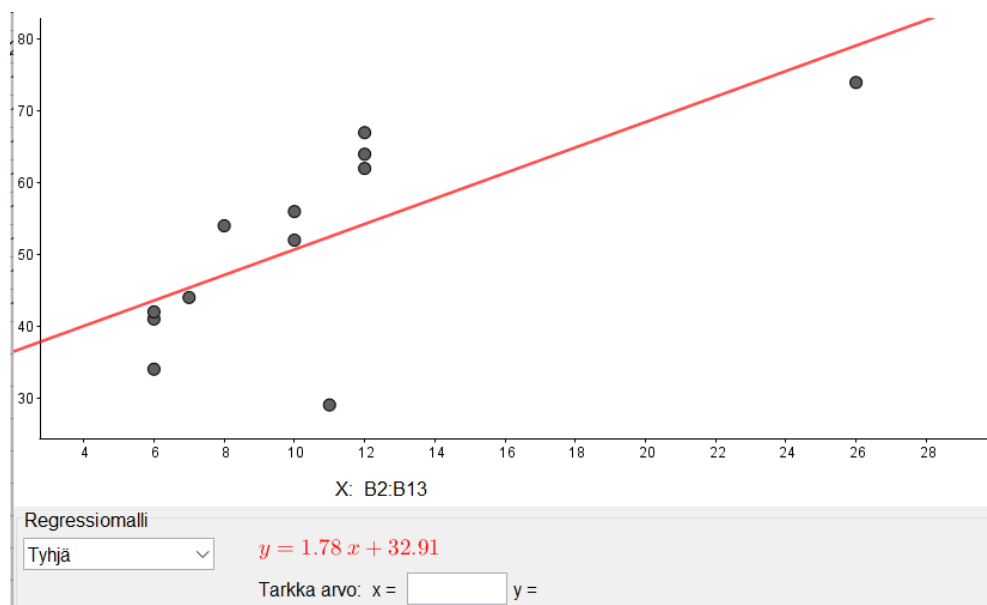
KeskiarvoX	6.5
KeskiarvoY	1.6417
Sx	3.6056
Sy	0.326
r	-0.6303
ρ	-0.6338
Sxx	143
VarianssiY	1.1692
Sxy	-8.15
R <sup>2</sup>	0.3973
SSE	0.7047

Korrelaatiokerroin  $r \approx -0,63$

Hajontakuvion ja korrelaatiokertoimen perusteella kuukauden ja rikkidioksidipitoisuuden välillä on huomattava negatiivinen lineaarinen riippuvuus.

- c) Valitaan nyt selittäväksi muuttujaksi  $x$  pienhiukkaspitoisuus ja selitettäväksi muuttujaksi  $y$  otsonipitoisuus..

Piirretään hajontakuviota ja määritetään korrelaatiokerroin.



KeskiarvoX	10.5
KeskiarvoY	51.5833
Sx	5.4523
Sy	13.8463
r	0.7002
$\rho$	0.7745
Sxx	327
VarianssiY	2108.9167
Sxy	581.5
R <sup>2</sup>	0.4903
SSE	1074.8425

Korrelaatiokerroin  $r \approx 0,70$

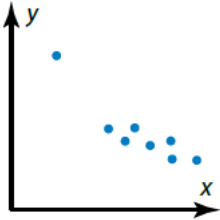
Hajontakuvion ja korrelaatiokertoimen perusteella pienhiukkas- ja otsonipitoisuuksien välillä on huomattava positiivinen lineaarinen riippuvuus.

### Vastaus

- a) epälineaarinen riippuvuus
- b) huomattava negatiivinen lineaarinen riippuvuus
- c) huomattava positiivinen lineaarinen riippuvuus

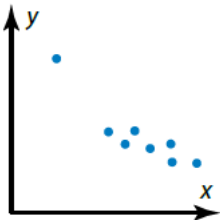
## K20

- a) Muut havaintoarvot ovat likimain samalla suoralla. Poikkeava havainto on tämän suoran yläpuolella.



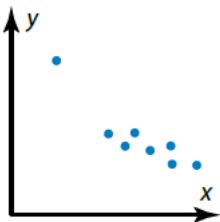
Kun poikkeava havainto poistetaan, korrelaatio voimistuu.

- b) Poikkeavan havainnon  $x$ -koordinaatti on selvästi pienempi kuin muiden havaintoarvojen  $x$ -koordinaatit.



Kun poikkeava havainto poistetaan, muuttujan  $x$  keskiarvo suurenee. Tällöin muut arvot poikkeavat vähemmän keskiarvosta ja keskihajonta pienenee.

- c) Poikkeavan havainnon  $y$ -koordinaatti on selvästi suurempi kuin muiden havaintoarvojen  $y$ -koordinaatit.



Kun poikkeava havainto poistetaan, muuttujan  $y$  keskiarvo pienenee. Tällöin muut arvot poikkeavat vähemmän keskiarvosta ja keskihajonta pienenee.

# K21

Suurin osa havainnoista on välillä 8–10. Kolme muuttujan arvoa  $x = 1$  poikkeavat näistä selvästi.

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

## 1) Koko jakauma

Syötetään pisteet ja frekvenssit taulukkolaskentaan ja määritetään tilastolliset tunnusluvut.

	A	B
1	<b>Muuttuja x</b>	<b>f</b>
2	1	3
3	8	4
4	9	5
5	10	1

n	13
Keskiarvo	6.9231
$\sigma$	3.2925
s	3.4269
$\Sigma x$	90
$\Sigma x^2$	764
Min	1
Q1	4.5
Mediaani	8
Q3	9
Max	10

Moodi on 9.

Mediaani on 8.

Keskiarvo on 6,9.

Keskihajonta on 3,4.

## 2) Jakauma ilman muuttujan arvoa 1

Poistetaan poikkeavat havainnot eli muuttujan arvot  $x = 1$  aineistosta.

	A	B
1	<b>Muuttuja x</b>	<b>f</b>
2	8	4
3	9	5
4	10	1

n	10
Keskiarvo	8.7
$\sigma$	0.6403
s	0.6749
$\Sigma x$	87
$\Sigma x^2$	761
Min	8
Q1	8
Mediaani	9
Q3	9
Max	10

Moodi on 9

Mediaani on 9.

Keskiarvo on 8,7.

Keskihajonta on 0,7 pistettä.

Poikkeava havainto pienentää mediaania ja keskiarvoa sekä suurentaa keskihajontaa.

### Vastaus

koko aineisto: moodi 9, mediaani 8, keskiarvo 6,9 ja keskihajonta 3,4;

ilman arvoa  $x = 1$ : moodi 9, mediaani 9, keskiarvo 8,7 ja

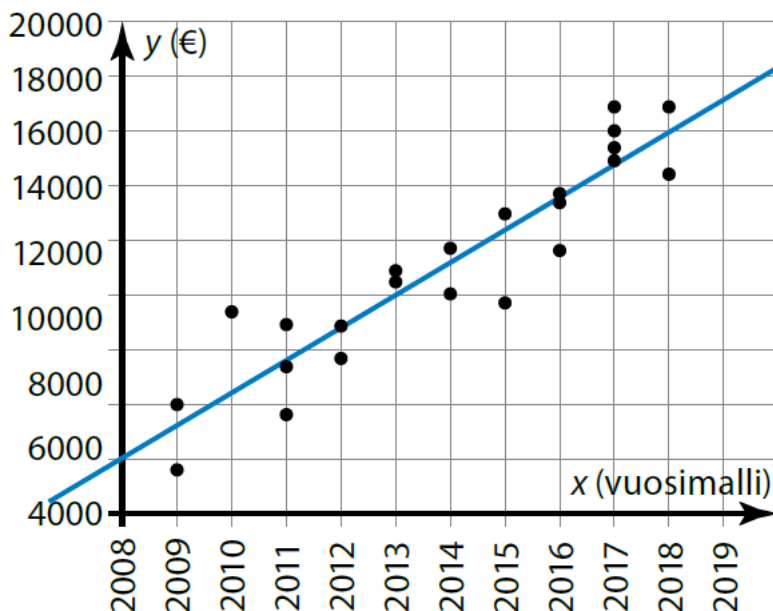
keskihajonta 0,7



## K22

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Avataan aineisto GeoGebralla.

Piirretään hajontakuvio.



a) Kuviossa on poikkeava havaintoarvo (2010, 11 400). Aineistossa arvo sijaitsee rivillä 22.

Määritetään korrelaatiokerroin koko aineistosta.

KeskiarvoX	2013.9565
KeskiarvoY	13148.2609
Sx	2.8995
Sy	3726.9457
r	0.9266
$\rho$	0.9346
Sxx	184.9565
VarianssiY	305582730.4348
Sxy	220278.2609

Korrelaatiokerroin on  $r \approx 0,93$ . Vuosimallin ja hinnan välillä näyttää olevan voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus

Poistetaan aineistosta poikkeava arvo ja määritetään korrelaatiokerroin uudestaan.

KeskiarvoX	2014.1364
KeskiarvoY	13227.7273
Sx	2.8334
Sy	3794.654
r	0.9436
$\rho$	0.9434
Sxx	168.5909
VarianssiY	302387386.3636
Sxy	213046.8182

Korrelaatiokerroin on  $r \approx 0,94$ . Vuosimallin ja hinnan välillä näyttää olevan voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus

Poikkeava arvo ei vaikuta juurikaan korrelaation luonteeseen tai voimakkuuteen.

- c) Määritetään regressiosuoran yhtälö, kun käytetään aineistoa, josta on poistettu poikkeava arvo.

Regressiosuoran yhtälö on  $y = 1263,691x + 2532018,312$ , missä  $x$  on vuosimalli ja  $y$  auton arvo (€). Sijoitetaan yhtälöön poistetun auton vuosimalli  $x = 2010$ .

$$y = 1263,691 \cdot 2010 + 2532018,312 \approx 8000$$

Poistetun auton hinta olisi regressiosuoran yhtälön perusteella 8000 €.

### Vastaus

- a) poikkeava havainto (2010, 11 400); ei vaikuta juurikaan korrelaation luonteeseen tai voimakkuuteen
- b)  $y = 1263,691x + 2532018,312$ , missä  $x$  on vuosimalli ja  $y$  auton arvo (€)  
vuonna 2010 auton arvo olisi mallin mukaan 8000 €

## K23

- a) Laatikossa on yhteensä 18 palloa.

Näistä oransseja on  $18 - 9 - 4 = 5$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pallo on oranssi}) = \frac{5}{18} \approx 0,278$$

- b) Palloja, jotka eivät ole keltaisia, on  $18 - 4 = 14$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pallo ei ole keltainen}) = \frac{14}{18} \approx 0,778$$

- c) Laatikossa ei ole lainkaan punaisia palloja, joten tapahtuma on mahdoton. Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0.

### Vastaus

- a) 0,278  
b) 0,778  
c) 0

## K24

Kun korttipakasta on nostettu kaksi korttia, jäljellä on  
 $52 - 2 = 50$  korttia.

Koska nostetut kortit ovat herttoja, korttipakassa on jäljellä  
 $13 - 2 = 11$  herttaa.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kolmas kortti on hertta}) = \frac{11}{50} = 0,22$$

**Vastaus**

0,22

## K25

a) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon silmälukujen summat.

	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
Ensimmäisen nopan tulos	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		Toisen nopan tulos					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 6 = 36$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 4” suotuisia alkeistapauksia on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 4) = \frac{3}{36} \approx 0,0833$$

b) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla.

	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
Ensimmäisen nopan tulos	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		Toisen nopan tulos					

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on korkeintaan 4” suotuisia alkeistapauksia on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 4) = \frac{6}{36} \approx 0,167$$

**Vastaus**

**a)** 0,0833

**b)** 0,167

## K26

- a) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon silmälukujen summat.

Neljäsvuosen nopan tulos	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	2	3	4	5	6	7	8
				Kahdeksansivuisen nopan tulos					

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $4 \cdot 8 = 32$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 6” suotuisia alkeistapauksia on 4.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{silmälukujen summa on 6}) = \frac{4}{32} = 0,125$$

- b) Havainnollistetaan heittotuloksia taulukon avulla. Merkitään taulukkoon tapaukset, joissa nelitahokkaan silmäluku on suurempi kuin kahdeksantahokkaan.

Neljäsvuosen nopan tulos	4	x	x	x					
	3	x	x						
	2	x							
	1								
		1	2	3	4	5	6	7	8
				Kahdeksansivuisen nopan tulos					

Tapahtumalle A: ”nelitahokkaan silmäluku on suurempi kuin kahdeksantahokkaan” suotuisia alkeistapauksia on 6.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{6}{32} \approx 0,188$$

### Vastaus

- a) 0,125      b) 0,188

## K27

- a) Lasketaan yksityisten palkansaajien lukumäärä.

$$1917 + 1711 + 702 + 221 + 81 + 61 + 31 = 4724 \text{ (tuhatta henkeä)}$$

Lasketaan yli 60 000 € ansaitsevien lukumäärä.

$$221 + 81 + 61 + 31 = 394 \text{ (tuhatta henkeä)}$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{tulot yli } 60\,000 \text{ €}) = \frac{394}{4724} \approx 0,0834$$

- b) Lasketaan vähintään 20 000 € mutta alle 80 000 € ansaitsevien lukumäärä.

$$1711 + 702 + 221 = 2634 \text{ (tuhatta henkeä)}.$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{tulot yli } 20\,000 \text{ €, mutta alle } 80\,000 \text{ €}) = \frac{2634}{4724} \approx 0,558$$

- c) Vähintään 60 000 € ansaitsee 394 (tuhatta henkeä).

Heistä  $221 + 81 = 302$  (tuhatta henkeä) ansaitsee alle 100 000 €.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{tulot alle } 100\,000 \text{ €, kun ansaitsee vähintään } 60\,000 \text{ €})$

$$= \frac{302}{394} \approx 0,766$$

### Vastaus

- a) 0,0834
- b) 0,558
- c) 0,766



## K28

- a) Syntyneistä hiiristä 66 % on elossa vielä 2-vuotiaana.

Tapahtuman ”hiiri elää ainakin kaksivuotiaaksi” todennäköisyys on siis 0,66.

- b) Syntyneistä hiiristä 66 % elää 2-vuotiaaksi ja 31 % elää 3-vuotiaaksi.

Syntyneistä hiiristä  $66\% - 31\% = 35\%$  elää 2-vuotiaaksi, muttei 3-vuotiaaksi.

Tapahtuman ”hiiri elää 2-vuotiaaksi, muttei 3-vuotiaaksi” todennäköisyys on siis 0,35.

- c) Jos yhden vuoden elänyt hiiri elää vielä ainakin kaksi vuotta, elää se vähintään 3-vuotiaaksi.

Taulukon mukaan syntyneistä hiiristä 72 % elää 1-vuotiaaksi ja 31 % elää 3-vuotiaaksi.

Merkitään syntyneiden hiirien määrää kirjaimella  $a$ .  
1-vuotiaaksi elää  $0,72a$  hiirtä ja vähintään 3-vuotiaaksi  $0,31a$  hiirtä.

Lasketaan tapahtuman ”yhden vuoden iän saavuttanut hiiri elää vielä ainakin 2 vuotta” todennäköisyys.

$$P = \frac{0,31a}{0,72a} \approx 0,431$$

- d) Jos neljä vuotta elänyt hiiri elää vielä ainakin kaksi vuotta, elää se vähintään 6-vuotiaaksi.

Taulukon mukaan kaikki hiiret ovat kuolleet viiden vuoden ikään mennessä. Näin ollen tapahtuman ”neljän vuoden iän saavuttanut hiiri elää vielä ainakin kaksi vuotta” todennäköisyys on 0.

### Vastaus

- a) 0,66  
b) 0,35  
c) 0,431  
d) 0

## K29

a) Lasketaan opiskelijoiden kokonaismäärä

$$2 + 4 + 12 + 10 + 5 + 3 = 36$$

Lasketaan, kuinka moni opiskelija sai vähintään arvosanan 8.

$$5 + 3 + 0 = 8$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{arvosana vähintään } 8) = \frac{8}{36} \approx 0,222$$

b) Vähintään arvosanan 8 sai 8 opiskelijaa.

Arvosanan 9 sai 3 opiskelijaa.

Lasketaan tapahtuman

”arvosana oli 9, kun arvosanan tiedettiin olevan vähintään 8” todennäköisyys.

$$P = \frac{3}{8} = 0,375$$

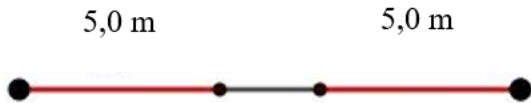
**Vastaus**

a) 0,222

b) 0,375

## K30

Jotta molempien pätkien pituus olisi vähintään 5 metriä, katkaisukohdan etäisyys käyden kummastakin päästä tulee olla vähintään 5 metriä. Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Tapahtumalle ”molempien pätkien pituus on vähintään 5 metriä” suotuisa pituus on  $14 - 5 - 5 = 4$  (m). Koko perusjoukko on köyden alkuperäinen pituus 14 m.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

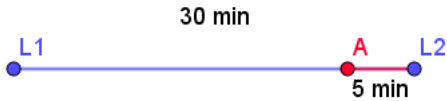
$$P(\text{pätkien pituus vähintään } 5 \text{ m}) = \frac{4 \text{ m}}{14 \text{ m}} \approx 0,286$$

**Vastaus**

0,286

## K31

- a) Junien aikataulu koostuu samanlaisia puolen tunnin jaksoista, joten riittää tutkia yhtä niistä. Havainnollistetaan tilannetta aikajanalla.



Juna lähtee hetkellä  $L_1$ , seuraavaan junaan pääsee hetkellä  $A$  ja kyseinen juna lähtee 5 minuuttia myöhemmin hetkellä  $L_2$ .

Jotta matkustaja pääsee heti junaan, hänen on saavuttava asemalle sen 5 minuutin aikana, jona junaan pääsee sisälle.

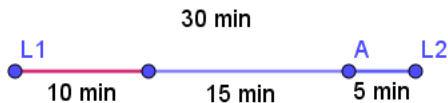
Tapahtumalle ”pääsee heti junaan” suotuisan ajanjakson pituus on 5 min.

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on  $0,5\text{h} = 30\text{min}$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pääsee suoraan junaan}) = \frac{5 \text{ min}}{30 \text{ min}} \approx 0,167$$

- b) Jotta matkustaja joutuu odottamaan junaan pääsyä yli 15 minuuttia, hänen on saavuttava asemalle hetken  $L_1$  jälkeen ja viimeistään 15 minuuttia ennen hetkeä  $A$ .



Tapahtumalle ”joutuu odottamaan yli 15 minuuttia” suotuisan ajanjakson pituus on  $30 \text{ min} - 5 \text{ min} - 15 \text{ min} = 10 \text{ min}$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{odottaa yli 15 min}) = \frac{10 \text{ min}}{30 \text{ min}} \approx 0,333$$

### Vastaus

- a) 0,167  
b) 0,333

## K32

- a) Tapahtumalle ”saadaan vähintään 8” suotuisa alue on tikkataulun keskellä oleva ympyrä, jonka säde on  $1,0 + 2,0 + 2,0 = 5,0$  (cm). Lasketaan tämän ympyrän pinta-ala.

$$\pi \cdot 5,0^2 \approx 78,5398 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Koko perusjoukko on tikkataulun muodostama ympyrä, jonka säde on  $1,0 + 9 \cdot 2,0 = 19,0$  (cm). Lasketaan tämän ympyrän pinta-ala.

$$\pi \cdot 19,0^2 \approx 1134,11 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{saadaan vähintään } 8) = \frac{78,5398 \text{ cm}^2}{1134,11 \text{ cm}^2} \approx 0,0693$$

- b) Tapahtuman ”saadaan korkeintaan 7” vastatapahtuma on ”saadaan vähintään 8”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{saadaan korkeintaan } 7) &= 1 - P(\text{saadaan vähintään } 8) \\ &= 1 - \frac{78,5398 \text{ cm}^2}{1134,11 \text{ cm}^2} \\ &\approx 0,931 \end{aligned}$$

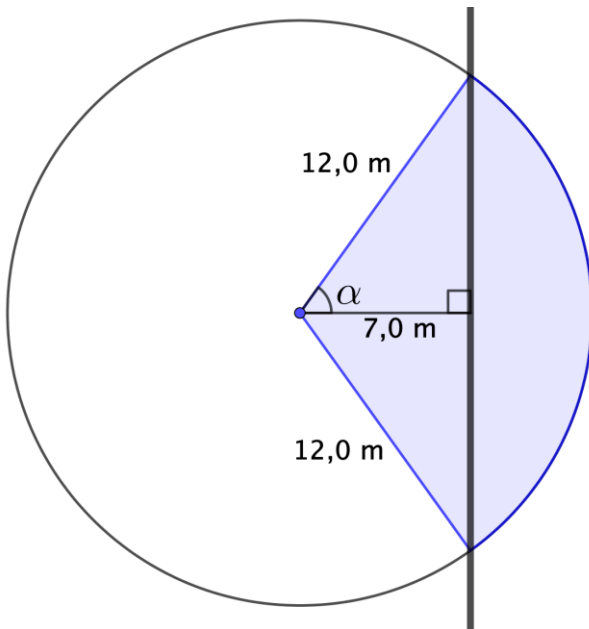
### Vastaus

a) 0,0693

b) 0,931

### K33

Tarkastellaan tilannetta ylhäältä päin ja hahmotellaan tilanteesta kuva.



Sähkopylväs osuu tielle, mikäli se kaatuu kuvaan merkittyyn ympyräsektoriin. Ympyrän säde on 12,0 m. Tien reuna ja sektoria rajaavat ympyrän säteet muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka korkeus on 7,0 m.

Käytetään geometrisena mittana kulman suuruutta. Tapahtumalle ”pylväs osuu tielle” suotuisa mitta on sektorin keskuskulman  $2\alpha$  suuruus. Perusjoukon mitta on täysi kulma  $360^\circ$ .

Lasketaan kulman  $\alpha$  suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{7,0}{12,0} \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{7,0}{12,0}\right) \\ &\approx 54,3147^\circ\end{aligned}$$

Sektorin keskuskulman suuruus on  $2\alpha = 2 \cdot 54,3147^\circ = 108,629^\circ$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pylväs osuu tielle}) = \frac{108,629^\circ}{360^\circ} \approx 0,302$$

**Vastaus**

0,302

## K34

- a) Satunnaisesti valittu päivä on sadepäivä todennäköisyydellä

$$P(\text{sadepäivä}) = \frac{1}{3}.$$

Lasketaan todennäköisyys, että joensuulaisperheen lapsi syntyy sadepäivänä.

$$P(\text{syntyy sadepäivänä}) = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

- b) Satunnaisesti valittu päivä on sunnuntai todennäköisyydellä

$$P(\text{sunnuntai}) = \frac{1}{7}.$$

Lasketaan todennäköisyys, että joensuulaisperheen lapsi syntyy sunnuntaina.

$$P(\text{syntyy sunnuntaina}) = \frac{1}{7} \approx 0,143$$

- c) Koska viikonpäivä ja päivän sateisuus ovat toisistaan riippumattomia, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”syntyy sateisena sunnuntaina” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{sateinen sunnuntai}) &= P(\text{sadepäivä}) \cdot P(\text{sunnuntai}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} \\ &\approx 0,0476 \end{aligned}$$

- d) Päivä on poutapäivä todennäköisyydellä

$$P(\text{poutapäivä}) = 1 - P(\text{sadepäivä}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Satunnaisesti valittu päivä on arkipäivä todennäköisyydellä

$$P(\text{arkipäivä}) = \frac{5}{7}.$$

Koska viikonpäivä ja päivän sateisuus ovat toisistaan riippumattomia, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”syntyy poutaisena arkipäivänä” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{poutainen arkipäivä}) &= P(\text{poutapäivä}) \cdot P(\text{arkipäivä}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \\ &\approx 0,476 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,333
- b) 0,143
- c) 0,0476
- d) 0,476

## K35

a) Merkitään liikennevaloja  $V_1$  ja  $V_2$ .

Ensimmäiset valot näyttävät vihreää 30 % todennäköisyydellä, joten ne näyttävät punaista 70 % todennäköisyydellä.

$$P(V_1 \text{ vihreä}) = 0,30$$

$$P(V_1 \text{ punainen}) = 0,70$$

Toiset valot näyttävät vihreää 40 % todennäköisyydellä, joten ne näyttävät punaista 60 % todennäköisyydellä.

$$P(V_2 \text{ vihreä}) = 0,40$$

$$P(V_2 \text{ punainen}) = 0,60$$

Tapahtuma ”pysähtyy täsmälleen kerran” muodostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta: ” $V_1$  vihreä ja  $V_2$  punainen” tai ” $V_1$  punainen ja  $V_2$  vihreä”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pysähtyy täsmälleen kerran})$$

$$= P(V_1 \text{ vihreä ja } V_2 \text{ punainen}) + P(V_1 \text{ punainen ja } V_2 \text{ vihreä})$$

$$= P(V_1 \text{ vihreä}) \cdot P(V_2 \text{ punainen}) + P(V_1 \text{ punainen}) \cdot P(V_2 \text{ vihreä})$$

$$= 0,30 \cdot 0,60 + 0,70 \cdot 0,40$$

$$= 0,46$$

b) Tapahtuma  $A$ : ”Tiina joutuu pysähtymään korkeintaan kerran” tarkoittaa, että Tiina joutuu pysähtymään ensimmäisissä tai toisissa tai Tiina ei joudu pysähtymään lainkaan.

Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman ”Tiina joutuu pysähtymään molemmissa valoissa” todennäköisyys.

Lasketaan vastatapahtuman  $\bar{A}$  todennäköisyys.

$$P(\bar{A}) = P(\text{Tiina pysähtyy molemmissa valoissa})$$

$$= P(V_1 \text{ punainen ja } V_2 \text{ punainen})$$

$$= P(V_1 \text{ punainen}) \cdot P(V_2 \text{ punainen})$$

$$= 0,70 \cdot 0,60$$

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - 0,70 \cdot 0,60$$

$$= 0,58$$

**Vastaus**

a) 0,46

b) 0,58



## K36

- a) Lasketaan tapahtuman ”kaikki arvat ovat voittoarpoja” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikki arvat ovat voittoarpoja}) \\ &= P(1. voittaa \text{ ja } 2. voittaa \text{ ja } 3. voittaa) \\ &= P(1. voittaa) \cdot P(2. voittaa) \cdot P(3. voittaa) \\ &= 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \\ &= 0,30^3 \\ &= 0,027 \end{aligned}$$

- b) Arpa on voittoarpa todennäköisyydellä 0,30, joten arpa ei ole voittoarpa todennäköisyydellä 0,70.

Lasketaan tapahtuman ”yksikään ei ole voittoarpa” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{yksikään ei ole voittoarpa}) \\ &= P(1. ei voittoa \text{ ja } 2. ei voittoa \text{ ja } 3. ei voittoa) \\ &= P(1. ei voittoa) \cdot P(2. ei voittoa) \cdot P(3. ei voittoa) \\ &= 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,70 \\ &= 0,70^3 \\ &\approx 0,34 \end{aligned}$$

- c) Tapahtuma  $A$ : ”ainakin yksi on voittoarpa” todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”yksikään ei ole voittoarpa” avulla.

Vastatapahtuman  $\bar{A}$  todennäköisyys

$$P(\bar{A}) = P(\text{yksikään ei ole voittoarpa}) = 0,70^3$$

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,70^3 \\ &\approx 0,66 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,027  
b) 0,34  
c) 0,66

## K37

- a) Yksittäisessä tuotteessa on vika todennäköisyydellä 0,15, joten tuotteessa ei ole vikaa 0,85 todennäköisyydellä.

Merkitään tuotetta, jossa on vika,  $V$  ja ehjää tuotetta  $E$ .

Tapahtuma "täsmälleen yksi on viallinen" muodostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta: " $V E$ " tai " $E V$ ".

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen yksi viallinen}) \\ &= P(V E) + P(E V) \\ &= P(V) \cdot P(E) + P(E) \cdot P(V) \\ &= 0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 \\ &\approx 0,26 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuma "täsmälleen yksi on viallinen" muodostuu kolmesta erillisestä tapahtumasta: " $V E E$ " tai " $E V E$ " tai " $E E V$ ".

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen yksi viallinen}) \\ &= P(V E E) + P(E V E) + P(E E V) \\ &= P(V) \cdot P(E) \cdot P(E) + P(E) \cdot P(V) \cdot P(E) + P(E) \cdot P(E) \cdot P(V) \\ &= 0,15 \cdot 0,85 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,15 \\ &\approx 0,33 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 0,26

b) 0,33

## K38

Tapahtuman  $A$ : ”ainakin yksi on kirkkokuntiin kuulumaton” todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”yksikään ei ole kirkkokuntiin kuulumaton” avulla.

Suomalainen ei kuulu mihinkään kirkkokuntaan todennäköisyydellä 0,285, joten hän kuuluu johonkin kirkkokuntaan todennäköisyydellä  $1 - 0,285 = 0,715$ .

Lasketaan vastatapahtuman  $\bar{A}$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään ei ole kirkkokuntiin kuulumaton}) \\ &= P(1. \text{ ei kk ja } 2. \text{ ei kk ja } \dots \text{ ja } 5. \text{ ei kk}) \\ &= P(1. \text{ ei kk}) \cdot P(2. \text{ ei kk}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ ei kk}) \\ &= 0,715 \cdot 0,715 \cdot 0,715 \cdot 0,715 \cdot 0,715 \\ &= 0,715^5 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,715^5 \\ &\approx 0,813 \end{aligned}$$

**Vastaus**

0,813

## K39

- a) Ensimmäinen kuutonen tulee toisella heitolla, jos ensimmäinen heitto ei ole kuutonen ja toinen heitto on.

Yksittäisellä heitolla todennäköisyys heittää kuutonen on  $\frac{1}{6}$  ja jonkun muun silmäluvun todennäköisyys on  $\frac{5}{6}$ .

Heittotulokset ovat riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä.

$$\begin{aligned} P(1. \text{ kuutonen } 2. \text{ heitolla}) &= P(1. \text{ ei kuutosta ja } 2. \text{ kuutonen}) \\ &= P(1. \text{ ei kuutonen}) \cdot P(2. \text{ kuutonen}) \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 0,139 \end{aligned}$$

- b) Ensimmäinen kuutonen tulee neljännellä heitolla, jos kolme ensimmäistä heittoa eivät ole kuutosia ja neljäs heitto on kuutonen.

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ kuutonen } 4. \text{ heitolla}) \\ &= P(1. \text{ ei kuutonen ja } 2. \text{ ei kuutonen ja } 3. \text{ ei kuutonen ja } 4. \text{ kuutonen}) \\ &= P(1. \text{ ei kuutonen}) \cdot P(2. \text{ ei kuutonen}) \cdot P(3. \text{ ei kuutonen}) \cdot P(4. \text{ kuutonen}) \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{5^3}{6^4} \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 0,0965 \end{aligned}$$

- c) Ensimmäinen kuutonen tulee 11. heitolla, jos kymmenen ensimmäistä heittoa eivät ole kuutosia ja 11. heitto on kuutonen.

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ kuutonen } 11. \text{ heitolla}) \\ &= P(1. \text{ ei kuutonen ja } 2. \text{ ei kuutonen } \dots \text{ ja } 10. \text{ ei kuutonen ja } 11. \text{ kuutonen}) \\ &= \frac{5^{10}}{6^{11}} \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 0,0224 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,139  
b) 0,0965  
c) 0,0224

## K40

- a) Astiassa on 9 lappua. Kirjaimet S, O, T, V ja N esiintyvät yhden kerran ja kirjaimet U ja E kaksi kertaa.

Koska laput palautetaan astiaan, todennäköisyys nostaa yksittäisellä nostolla kirjain V on  $\frac{1}{9}$ . Sama todennäköisyys on myös kirjaimilla T ja O. Todennäköisyys nostaa yksittäisellä nostolla E on  $\frac{2}{9}$ .

Nostotulokset ovat riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä.

$$\begin{aligned}P(\text{sana VETO}) &= P(1. V \text{ ja } 2. E \text{ ja } 3. T \text{ ja } 4. O) \\&= P(1. V) \cdot P(2. E) \cdot P(3. T) \cdot P(4. O) \\&= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \\&\approx 0,000305\end{aligned}$$

- b) Koska laput palautetaan astiaan, todennäköisyys nostaa yksittäisellä nostolla E on  $\frac{2}{9}$ . Sama todennäköisyys on myös kirjaimella U. Todennäköisyys nostaa yksittäisellä nostolla kirjain S on  $\frac{1}{9}$ .

Nostotulokset ovat riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä.

$$\begin{aligned}P(\text{sana ESSU}) &= P(1. E \text{ ja } 2. S \text{ ja } 3. S \text{ ja } 4. U) \\&= P(1. E) \cdot P(2. S) \cdot P(3. S) \cdot P(4. U) \\&= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} \\&\approx 0,000610\end{aligned}$$

- c) Astiassa ei ole kirjainta I, joten nostetuista lapuista ei voi muodostua sanaa SUVI. Kyseessä on siis mahdoton tapahtuma, joten tapahtuman todennäköisyys on 0.

### Vastaus

- a) 0,000 305  
b) 0,000 610  
c) 0

## K41

- a) Yksittäinen arpa on voittoarpa todennäköisyydellä 0,70. Yksittäinen arpa ei voita todennäköisyydellä  $1 - 0,70 = 0,30$ . Merkitään voittoa V ja ei voittoa E.

Tapahtuma ”saadaan täsmälleen kolme voittoa” koostuu neljästä erillisestä tapahtumasta:

”E V V V”

”V E V V”

”V V E V”

”V V V E”

Todennäköisyys, että ensimmäisessä arvassa ei ole voittoa, mutta muissa on voitto, on

$$P(E V V V) = 0,30 \cdot 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,70 = 0,30 \cdot 0,70^3.$$

Sama todennäköisyys on sille, että ainoastaan 2. arvassa, 3. arvassa tai 4. arvassa ei ole voittoa.

$$\begin{aligned} &P(\text{saadaan täsmälleen kolme voittoa}) \\ &= P(E V V V \text{ tai } V E V V \text{ tai } V V E V \text{ tai } V V V E) \\ &= P(E V V V) + P(V E V V) + P(V V E V) + P(V V V E) \\ &= 4 \cdot 0,30 \cdot 0,70^3 \\ &\approx 0,41 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuman ”saadaan vähintään kolme voittoa” koostuu viidestä erillisestä tapahtumasta:

”V V V V”

”E V V V”

”V E V V”

”V V E V”

”V V V E”

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{saadaan vähintään kolme voittoa}) \\ &= P(V V V V \text{ tai } E V V V \text{ tai } V E V V \text{ tai } V V E V \text{ tai } V V V E) \\ &= P(V V V V) + P(E V V V) + P(V E V V) + P(V V E V) + P(V V V E) \\ &= 0,70^4 + 4 \cdot 0,30 \cdot 0,70^3 \\ &\approx 0,65 \end{aligned}$$

- c) Tapahtuma  $A$ : ”korkeintaan kaksi voittoa” kannattaa laskea vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”saadaan vähintään kolme voittoa” avulla.

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,70^4 + 4 \cdot 0,30 \cdot 0,70^3 \\ &\approx 0,35 \end{aligned}$$

**Vastaus**

- a) 0,41
- b) 0,65
- c) 0,35

## K42

- a) Tapahtuman  $A$ : ”tuotteessa on ainakin yksi kolmesta viasta” todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”tuotteessa ei ole yhtäkään vikaa” avulla.

Viat esiintyvät todennäköisyyksillä 0,01, 0,02 ja 0,03, joten tuotteessa ei vastaavasti ole kyseistä vikaa todennäköisyyksillä 0,99, 0,98 ja 0,97.

Lasketaan vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”tuotteessa ei ole yhtäkään vikaa” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{tuotteessa ei ole yhtäkään vikaa}) \\&= P(\text{ei vikaa 1 ja ei vikaa 2 ja ei vikaa 3}) \\&= P(\text{ei vikaa 1}) \cdot P(\text{ei vikaa 2}) \cdot P(\text{ei vikaa 3}) \\&= 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \\&\approx 0,06\end{aligned}$$

- b) Tapahtuman  $B$ : ”kymmenestä tuotteesta ainakin yksi on viallinen” todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman  $\bar{B}$ : ”yksikään kymmenestä tuotteesta ei ole viallinen” avulla.

Lasketaan vastatapahtuman  $\bar{B}$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{B}) &= P(\text{yksikään kymmenestä tuotteesta ei ole viallinen}) \\&= P(1. \text{ ei viallinen ja } 2. \text{ ei viallinen ja } \dots \text{ ja } 10. \text{ ei viallinen}) \\&= P(1. \text{ ei viallinen}) \cdot P(2. \text{ ei viallinen}) \cdot \dots \cdot P(10. \text{ ei viallinen}) \\&= \underbrace{(0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97) \cdot (0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97) \cdot \dots \cdot (0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97)}_{10 \text{ kappaletta}} \\&= (0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97)^{10}\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman  $B$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\&= 1 - (0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97)^{10} \\&\approx 0,46\end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,06  
b) 0,46



## K43

Tapahtuman  $A$ : ”opetusryhmän opiskelijoista ainakin yksi on syntynyt karkauspäivänä”  
todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman  $\bar{A}$ : ”opetusryhmän yksikään opiskelija ei ole syntynyt karkauspäivänä” avulla.

Opiskelija on syntynyt karkauspäivänä todennäköisyydellä  $\frac{1}{366}$ , joten hän ei ole syntynyt karkauspäivänä todennäköisyydellä  $1 - \frac{1}{366} = \frac{365}{366}$ .

Lasketaan vastatapahtuman  $\bar{A}$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään opiskelija ei ole syntynyt karkauspäivänä}) \\ &= P(1. \text{ ei karkausp. ja } 2. \text{ ei karkausp. ja } \dots \text{ ja } 27. \text{ ei karkausp.}) \\ &= P(1. \text{ ei karkausp.}) \cdot P(2. \text{ ei karkausp.}) \cdot \dots \cdot P(27. \text{ ei karkausp.}) \\ &= \underbrace{\frac{365}{366} \cdot \frac{365}{366} \cdot \dots \cdot \frac{365}{366}}_{28 \text{ kappaletta}} \\ &= \left(\frac{365}{366}\right)^{28} \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman  $A$  todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^{28} \\ &\approx 0,0737 \end{aligned}$$

**Vastaus**

0,0737

## K44

- a) Ruuvi putoaa ensimmäisessä töyssyssä todennäköisyydellä 0,1.
- b) Ruuvi putoaa toisessa töyssyssä, jos se ei putoa ensimmäisessä töyssyssä ja putoaa toisessa töyssyssä.

Yksittäisessä töyssyssä ruuvi putoaa todennäköisyydellä 0,10, joten se ei putoa todennäköisyydellä 0,90.

$$\begin{aligned}P(\text{ruuvi putoaa 2. töyssyssä}) &= P(1. \text{ ei putoa ja 2. putoaa}) \\&= P(1. \text{ ei putoa}) \cdot P(2. \text{ putoaa}) \\&= 0,90 \cdot 0,10 \\&= 0,09\end{aligned}$$

- c) Ruuvi putoaa kolmannessa töyssyssä, jos se ei putoa ensimmäisessä eikä toisessa töyssyssä ja putoaa kolmannessa töyssyssä.

$$\begin{aligned}P(\text{ruuvi putoaa 3. töyssyssä}) &= P(1. \text{ ei putoa ja 2. ei putoa ja 3. putoaa}) \\&= P(1. \text{ ei putoa}) \cdot P(2. \text{ ei putoa}) \cdot P(3. \text{ putoaa}) \\&= 0,90 \cdot 0,90 \cdot 0,10 \\&= 0,081\end{aligned}$$

- d) Ruuvi ei putoa laisinkaan, jos se ei putoa ensimmäisessä, toisessa eikä kolmannessa töyssyssä.

$$\begin{aligned}P(\text{ruuvi ei putoa}) &= P(1. \text{ ei putoa ja 2. ei putoa ja 3. ei putoa}) \\&= P(1. \text{ ei putoa}) \cdot P(2. \text{ ei putoa}) \cdot P(3. \text{ ei putoa}) \\&= 0,90 \cdot 0,90 \cdot 0,90 \\&= 0,73\end{aligned}$$

- e) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned}P(\text{ruuvi putoaa}) &= 1 - P(\text{ruuvi ei putoa}) \\&= 1 - 0,90 \cdot 0,90 \cdot 0,90 \\&\approx 0,27\end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,1  
b) 0,09  
c) 0,081  
d) 0,73  
e) 0,27

## K45

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman  $A$ : ”ainakin yksi on vasenkätinen” vastatapahtuma on  $\bar{A}$ : ”ei yhtään vasenkätistä”.

Todennäköisyys, että henkilö ei ole vasenkätinen, on  $1 - 0,11 = 0,89$ .

Jos ryhmään valitaan  $n$  jäsentä, niin todennäköisyys, että yksikään ei ole vasenkätinen, on  $\underbrace{0,89 \cdot 0,89 \cdot \dots \cdot 0,89}_{n \text{ kappaletta}} = 0,89^n$ .

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”ainakin yksi on vasenkätinen” todennäköisyydelle.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\ &= 1 - 0,89^n \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä jäsenmäärällä  $n$  todennäköisyys on 0,99.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 0,90 \\ 1 - 0,89^n &= 0,99 \\ n &\approx 39,5 \end{aligned}$$

Pyöristetään ylöspäin kokonaisiksi henkilöiksi, koska selvitetään todennäköisyyttä, että ainakin yksi on vasenkätinen

### Vastaus

vähintään 40 jäsentä

## K46

Puheenjohtaja voidaan valita 15 henkilöstä.

Sama henkilö ei voi olla sekä puheenjohtaja että sihteeri, joten sihteeri voidaan valita 14 henkilöstä.

Kokoukselle voidaan valita puheenjohtaja ja sihteeri

$15 \cdot 14 = 210$  tavalla.

**Vastaus**

210

## K47

Neljä kenttää voidaan laittaa järjestykseen

$4! = 24$  tavalla.

Oikeita järjestyksiä on 1.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kilpailija arvaa oikean järjestyksen}) = \frac{1}{24} \approx 0,0417$$

**Vastaus**

0,0417

## K48

- a) Sakarilla on yhteensä  $3 + 7 = 10$  kirjaa. Sakari voi asettaa kirjat riviin

$$10! = 3\,628\,800 \text{ tavalla.}$$

- b) Kirjasarjat voi järjestää keskenään kahdella tavalla, ensiksi Harry Potter -kirjat ja sitten Taru sormusten herrasta -kirjat tai ensiksi Taru sormusten herrasta -kirjat ja sitten Harry Potter -kirjat.

Harry Potter -kirjojen keskinäinen järjestys voidaan valita  $7!$  tavalla ja Taru sormusten herrasta -kirjojen keskinäinen järjestys  $3!$  tavalla.

Järjestyksiä, joissa saman aihepiirin kirjat ovat peräkkäin, on kaikkiaan

$$2 \cdot 7! \cdot 3! = 60\,480$$

### Vastaus

a) 3 628 800

b) 60 480

## K49

- a) Tarkastellaan heittosarjan muodostumista vaiheittain heitto kerrallaan. Jokaisessa vaiheessa on 6 vaihtoehtoa.

Tulosrivien lukumäärä on

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \\ &= 6^5 \\ &= 7776. \end{aligned}$$

- b) Ensimmäisellä heitossa on 6 vaihtoehtoa. Koska peräkkäisillä heitoilla ei saa tulla samaa silmälukua, muissa vaiheissa vaihtoehtoja on 5.

Tulosrivien lukumäärä on

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 3750. \end{aligned}$$

- c) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{jokaisella heitolla eri silmäluku}) = \frac{3750}{7776} \approx 0,482$$

Vetoa ei kannata lyödä, sillä todennäköisyys on pienempi kuin 0,5.

### Vastaus

- a) 7776  
b) 3750  
c) ei kannata

## K50

### a) TAPA 1: Osajoukkojen lukumäärä

8 kissanpennusta voidaan valita 2 kissan joukko  $\binom{8}{2}$  tavalla.

5 tyttökissasta voidaan valita 2 kissan joukko  $\binom{5}{2}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kumpikin on tyttökissa}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \approx 0,357$$

### TAPA 2: Kertolaskusääntö

$$\begin{aligned} &P(\text{kumpikin on tyttökissa}) \\ &= P(\text{ensimmäinen on tyttökissa ja toinen on tyttökissa}) \\ &= P(\text{ensimmäinen on tyttökissa}) \cdot P(\text{toinen on tyttökissa}) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \\ &\approx 0,357 \end{aligned}$$

### b) TAPA 1: Osajoukkojen lukumäärä

Tapahtuma ”pennut ovat samaa sukupuolta” toteutuu, jos molemmat pennut ovat tyttöjä tai molemmat pennut ovat poikia.

8 kissanpennusta voidaan valita 2 kissan joukko  $\binom{8}{2}$  tavalla.

5 tyttökissasta voidaan valita 2 kissan joukko  $\binom{5}{2}$  tavalla.

3 poikakissasta voidaan valita 2 kissan joukko  $\binom{3}{2}$  tavalla.



Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{samaa sukupuolta}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \approx 0,464$$

## **TAPA 2: Kertolaskusääntö ja yhteenlaskusääntö**

$$\begin{aligned} &P(\text{pennut ovat samaa sukupuolta}) \\ &= P(\text{molemmat ovat tyttöjä tai molemmat ovat poikia}) \\ &= P(\text{molemmat ovat tyttöjä}) + P(\text{molemmat ovat poikia}) \\ &= P(\text{tyttö ja tyttö}) + P(\text{poika ja poika}) \\ &= P(1. \text{ tyttö}) \cdot P(2. \text{ tyttö}) + P(1. \text{ poika}) \cdot P(2. \text{ poika}) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \\ &\approx 0,464 \end{aligned}$$

### **Vastaus**

**a)** 0,357

**b)** 0,464

## K51

a) 12 sukasta voidaan valita 4 sukan joukko  $\binom{12}{4}$  tavalla.

Sukista  $12 - 5 = 7$  on ehjiä. Näistä sukista voidaan valita 4 sukan joukko  $\binom{7}{4}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki ehjiä}) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} \approx 0,0707$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi rikkinäinen” vastatapahtuma on ”kaikki ehjiä”. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{ainakin yksi rikkinäinen}) = 1 - P(\text{kaikki ehjiä})$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} \\ &\approx 0,929 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 0,0707

b) 0,929

## K52

Kaikista 78 sienestä voidaan 6 tunnistettavaa sientä valita  $\binom{78}{6}$  tavalla.

Kurssilaisen oppimista 49 sienestä voidaan 6 tunnistettavaa sientä valita  $\binom{49}{6}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{tunnistaa kaikki 6}) = \frac{\binom{49}{6}}{\binom{78}{6}} \approx 0,0544$$

**Vastaus**

0,0544

## K53

a) Päänumerot voidaan valita  $\binom{48}{6}$  tavalla ja vikingnumero  $\binom{8}{1}$  tavalla.

Mahdollisia rivejä on yhteensä  $\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1} = 98\,172\,096$  kappaletta.

Kolme oikeaa päänumeroa kuuden joukosta voidaan valita  $\binom{6}{3}$  tavalla ja kolme muuta päänumeroa 42 numeron joukosta  $\binom{42}{3}$  tavalla.

Väärä vikingnumero voidaan valita 7 numeron joukosta  $\binom{7}{1}$  tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P$ (täsmälleen kolme päänumeroa oikein ja vikingnumero väärin)

$$\begin{aligned} &= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{42}{3} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1}} \\ &\approx 0,0164 \end{aligned}$$

b) Oikea vikingnumero voidaan valita yhdellä tavalla.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P$ (täsmälleen kolme päänumeroa ja vikingnumero oikein)

$$\begin{aligned} &= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{42}{3} \cdot 1}{\binom{48}{6} \cdot \binom{8}{1}} \\ &\approx 0,00234 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 0,0164

b) 0,00234

# A1

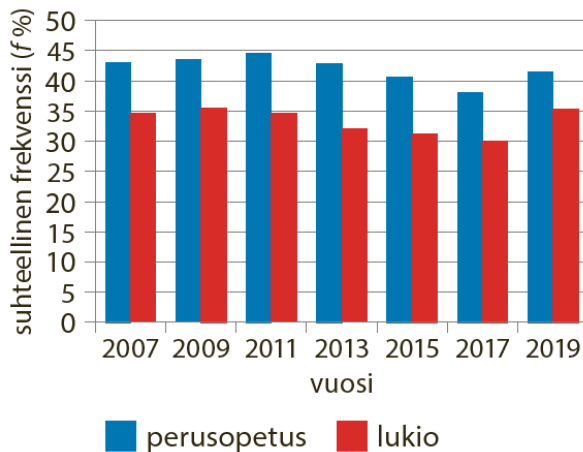
Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

a) Syötetään tiedot sarakkeisiin A–C.

	A	B	C
1		<b>Perusopetus</b>	
	<b>Vuosi</b>	<b>8. ja 9. luokka <math>f\%</math></b>	<b>Lukio 1 ja 2. vuosi <math>f\%</math></b>
2	2007	43,1	34,6
3	2009	43,5	34,5
4	2011	44,6	34,6
5	2013	42,9	32,1
6	2015	40,6	31,3
7	2017	38,1	30,0
8	2019	41,4	35,3

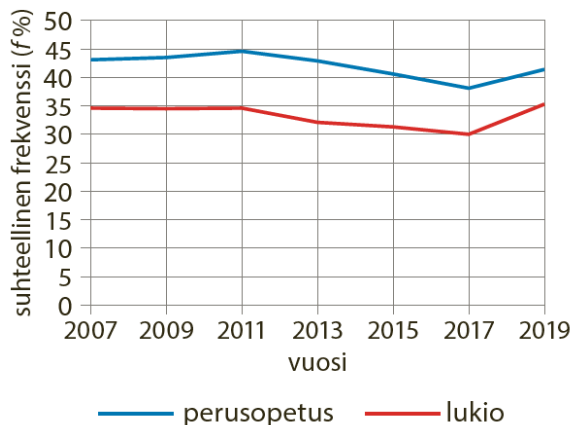
Piirretään pylväskuvio Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.

**Aamupalaa syömättömien osuus**



b) Piirretään viivadiagrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.

**Aamupalaa syömättömien osuus**



## A2

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc -ohjelmalla.

- a) Syötetään annetut tiedot sarakkeisiin A–B ja lasketaan suhteelliset frekvenssit sarakkeeseen C.

Kirjoitetaan kaava soluun C3 ja kopioidaan kaavaa alaspäin.

	A	B	C
1	<b>Tuloluokka (€)</b>	<b>Tulonsaajat (tuhatta henkeä)</b>	<b><math>f\%</math></b>
2		0	0
3	0-19 999	1917	'=B3/\$B\$10*100
4	20 000-39 999	1711	'=B4/\$B\$10*100
5	40 000-59 999	702	'=B5/\$B\$10*100
6	60 000-79 999	221	'=B6/\$B\$10*100
7	80 000-99 999	81	'=B7/\$B\$10*100
8	100 000-149 999	61	'=B8/\$B\$10*100
9	150000-	31	'=B9/\$B\$10*100
10	<b>Yhteensä</b>	<b>4724</b>	'=SUMMA(C3:C9)

	A	B	C
1	<b>Tuloluokka (€)</b>	<b>Tulonsaajat (tuhatta henkeä)</b>	<b><math>f\%</math></b>
2		0	0
3	0-19 999	1917	40,6
4	20 000-39 999	1711	36,2
5	40 000-59 999	702	14,9
6	60 000-79 999	221	4,7
7	80 000-99 999	81	1,7
8	100 000-149 999	61	1,3
9	150000-	31	0,7
10	<b>Yhteensä</b>	<b>4724</b>	<b>100</b>

- b) Lasketaan suhteelliset summafrekvenssit sarakkeeseen E.

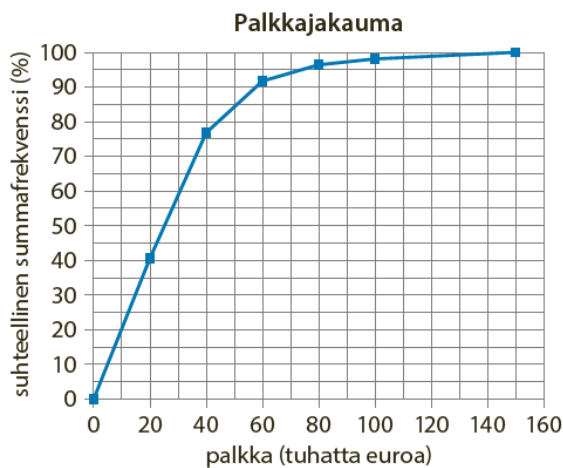
Kirjoitetaan kaava soluun E3 ja kopioidaan kaavaa alaspäin.

	A	B	C	D	E
1	<b>Tuloluokka (€)</b>	<b>Tulonsaajat (tuhatta henkeä)</b>	<b><math>f\%</math></b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><math>sf\%</math></b>
2		0	0	0	0,0
3	0-19 999	1917	40,6	19999,5	'=C3
4	20 000-39 999	1711	36,2	39999,5	'=E3+C4
5	40 000-59 999	702	14,9	59999,5	'=E4+C5
6	60 000-79 999	221	4,7	79999,5	'=E5+C6
7	80 000-99 999	81	1,7	99999,5	'=E6+C7
8	100 000-149 999	61	1,3	149999,5	'=E7+C8
9	150000-	31	0,7		'=E8+C9
10	<b>Yhteensä</b>	<b>4724</b>	<b>100</b>		

	A	B	C	D	E
1	<b>Tuloluokka (€)</b>	<b>Tulonsaajat (tuhatta henkeä)</b>	<b>f %</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b>sf %</b>
2		0	0	0	0,0
3	0-19 999	1917	40,6	19999,5	40,6
4	20 000-39 999	1711	36,2	39999,5	76,8
5	40 000-59 999	702	14,9	59999,5	91,7
6	60 000-79 999	221	4,7	79999,5	96,3
7	80 000-99 999	81	1,7	99999,5	98,1
8	100 000-149 999	61	1,3	149999,5	99,3
9	150000-	31	0,7		100,0
10	<b>Yhteensä</b>	<b>4724</b>	<b>100</b>		

Todellinen yläraja on merkitty taulukkoon kertymäkuvaajan piirtämistä varten. Kertymäkuvaajaa varten ensimmäiselle riville on merkitty myös nollarivi.

Piirretään kertymäkuvaaja Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



c) Arvioidaan mediaanipalkka kertymäkuvaajasta.

Kuvaaja ylittää 50 % rajan noin vuosipalkan 25 000 € kohdalla.

Mediaanipalkka on 25 000 €/v.

d) Arvioidaan palkka, jota enemmän tienasi 25 % palkansaajista.

Kuvaaja ylittää 75 % rajan noin 38 000 € kohdalla.

Palkansaajista 25 % tienasi yli 38 000 €/v.

**Vastaus**

c) 25 000 €/v

d) 38 000 €/v

## A3

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A ikäluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset. Kirjoitetaan sarakkeeseen E luokkien frekvenssit.

	A	B	C	D	E
1	<b>Ikä</b>	<b>Todellinen alaraja</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b>Luokkakeskus</b>	<b>f</b>
2	0-9	0	10	5	12
3	10-19	10	20	15	6
4	20-29	20	30	25	4
5	30-39	30	40	35	12
6	40-49	40	50	45	17
7	50-59	50	60	55	28
8	60-69	60	70	65	36
9	70-79	70	80	75	45
10	80-89	80	90	85	24
11	90-99	90	100	95	4

Määritetään tunnusluvut sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

n	188
Keskiarvo	59.0957
$\sigma$	22.6145
s	22.6749
$\Sigma x$	11110
$\Sigma x^2$	752700
Min	5
Q1	45
Mediaani	65
Q3	75
Max	95

Kyläjuhlaan osallistujien keski-ikä on 59 vuotta.

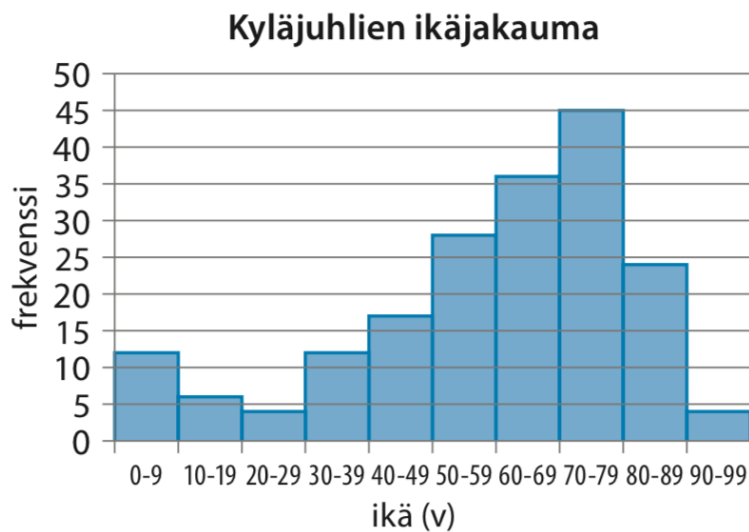


b) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Syötetään sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit.

	A	B
1	<b>ikä</b>	<b>f %</b>
2	0-9	12
3	10-19	6
4	20-29	4
5	30-39	12
6	40-49	17
7	50-59	28
8	60-69	36
9	70-79	45
10	80-89	24
11	90-99	4

Piirretään histogrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



**Vastaus**

a) 59 vuotta

## A4

- a) 62 abiturientin joukosta voidaan valita 11 opiskelijan joukkue

$$\binom{62}{11} \approx 5,08 \cdot 10^{11} \text{ tavalla.}$$

- b) 11 pelaajasta voidaan valita 6 pelaajan joukko

$$\binom{11}{6} = 462 \text{ tavalla.}$$

- c) Lentopallossa on kuusi eri paikkaa, johon pelaaja voi aloituksessa asettua.

Erilaisia aloitusjärjestyksiä on

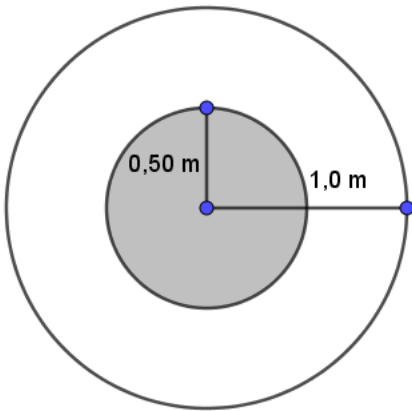
$$6! = 720 \text{ kappaletta.}$$

### Vastaus

- a) noin  $5,08 \cdot 10^{11}$   
b) 462  
b) 720

## A5

Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Tapahtumalle ”kivi osuu lähemmäs keskipistettä kuin kehää” suotuisa joukko on merkitty kuvaan harmaalla.

Isomman ympyrän eli koko perusjoukon säde on 1,0 m.

Perusjoukon pinta-ala on  $\pi \cdot 1,0^2 \approx 3,14159 \text{ (m}^2\text{)}$ .

Pienemmän ympyrän eli suotuisan alueen säde on 0,50 m.

Suotuisan alueen pinta-ala on  $\pi \cdot 0,50^2 \approx 0,785398 \text{ (m}^2\text{)}$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{kivi osuu lähemmäs keskipistettä kuin kehää})$

$$\approx \frac{0,785398 \text{ m}^2}{3,14159 \text{ m}^2}$$

$$\approx 0,25$$

**Vastaus**

0,25

## A6

- a) Siemen itää todennäköisyydellä 0,60, joten se ei idä todennäköisyydellä 0,40.

Oletetaan, että siemenet itävät toisistaan riippumatta. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{mikään kolmesta ei idä}) \\ &= P(1. \text{ ei idä ja } 2. \text{ ei idä ja } 3. \text{ ei idä}) \\ &= P(1. \text{ ei idä}) \cdot P(2. \text{ ei idä}) \cdot P(3. \text{ ei idä}) \\ &= 0,40 \cdot 0,40 \cdot 0,40 \\ &= 0,40^3 \\ &= 0,064 \end{aligned}$$

Tapahtuman "ainakin yksi siemen itää" vastatapahtuma on "mikään kolmesta siemenestä ei idä".

Lasketaan tapahtuman "ainakin yksi" todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{mikään kolmesta ei idä}) \\ &= 1 - 0,064 \\ &= 0,936 \end{aligned}$$

- b) Yhdessä ruukussa on kolme siementä, joten yksittäisessä ruukussa ainakin yksi siemen itää todennäköisyydellä 0,936.

Lasketaan tapahtuman "jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää" todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää}) \\ &= P(1. \text{ itää ainakin yksi ja } 2. \text{ itää ainakin yksi ja } \dots \text{ ja } 5. \text{ itää ainakin yksi}) \\ &= P(1. \text{ itää ainakin yksi}) \cdot P(2. \text{ itää ainakin yksi}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ itää ainakin yksi}) \\ &= 0,936 \cdot 0,936 \cdot 0,936 \cdot 0,936 \cdot 0,936 \\ &= 0,936^5 \\ &\approx 0,72 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a)  $P(\text{mikään ei idä}) = 0,064$   
 $P(\text{ainakin yksi itää}) = 0,936$   
b) 0,72

## A7

- a) Mies on avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa todennäköisyydellä 0,023, joten mies ei ole avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa todennäköisyydellä  $1 - 0,023 = 0,977$ .

Nainen on avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa todennäköisyydellä 0,048, joten nainen ei ole avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa todennäköisyydellä  $1 - 0,048 = 0,952$ .

Tapahtuma ”eri siviilisääty” muodostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta:

”M avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa ja N ei” tai

”M ei avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa ja N kyllä”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{eri siviilisääty}) \\ &= P(M \text{ kyllä ja } N \text{ ei}) + P(M \text{ ei ja } N \text{ kyllä}) \\ &= P(M \text{ kyllä}) \cdot P(N \text{ ei}) + P(M \text{ ei}) \cdot P(N \text{ kyllä}) \\ &= 0,023 \cdot 0,952 + 0,977 \cdot 0,048 \\ &\approx 0,069 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuma ”kahdella miehellä eri siviilisääty” muodostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta:

”M1 avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa ja M2 ei” tai

”M1 ei avioliitossa tai rekisteröidyssä parisuhteessa ja M2 kyllä”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{eri siviilisääty}) \\ &= P(M1 \text{ kyllä ja } M2 \text{ ei}) + P(M1 \text{ ei ja } M2 \text{ kyllä}) \\ &= P(M1 \text{ kyllä}) \cdot P(M2 \text{ ei}) + P(M1 \text{ ei}) \cdot P(M2 \text{ kyllä}) \\ &= 0,023 \cdot 0,977 + 0,977 \cdot 0,023 \\ &\approx 0,045 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 0,069

b) 0,045

## A8

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A37.

Lasketaan tunnusluvut sarakkeeseen D.

	A	B	C	D
1	<b>Massa (kg)</b>		Lukumäärä	'=LASKE.A(A2:A37
2	10-19		Mediaani	'=MEDIAANI(A2:A37)
3	3,1		Keskiarvo	'=KESKIARVO(A2:A37)
4	6,1		Keskihajonta	'=KESKIHAJONTA.S(A2:A37)
5	8,4			

	A	B	C	D
1	<b>Massa (kg)</b>		Lukumäärä	36
2	10-19		Mediaani	8,4
3	3,1		Keskiarvo	9,4
4	6,1		Keskihajonta	6
5	8,4			

Havaintoarvojen lukumäärä on 36,

mediaani 8,4 kg.

keskiarvo 9,4 kg ja

keskihajonta 6,0 kg.

b) Selvitetään aineiston pienin ja suurin arvo.

36	15,4	
37	19,9	
38	Pienin arvo	'=MIN(A2:A37)
39	Suurin arvo	'=MAKS(A2:A37)

36	15,4	
37	19,9	
38	Pienin arvo	1
39	Suurin arvo	19,9

Valitaan luokiksi tasalevyiset luokat 1–5, 6–10, 11–15 ja 16–20.

Lasketaan luokkien frekvenssit **TAAJUUS** -funktiota käyttäen.

	A	B	C	D
1	<b>Massa (kg)</b>	<b>Massaluokka (kg)</b>	<b>Todellinen yläraja</b>	<b><i>f</i></b>
2	1	1-5	5,5	11
3	3,1	6-10	10,5	12
4	6,1	11-15	15,5	6
5	8,4	16-20	20,5	7
6	13,4			0

Luokitellun aineiston frekvenssitaulukko:

Massa (kg)	<i>f</i>
1-5	11
6-10	12
11-15	6
16-20	7

- c) Luokan 6 kg – 10 kg frekvenssi on suurin.  
Siis moodiluokka on 6 kg – 10 kg.

### Vastaus

- a) lukumäärä 36, mediaani 8,4 kg, keskiarvo 9,4 kg, keskihajonta 6,0 kg  
c) moodiluokka on 6 kg – 10 kg.

## A9

Lasketaan, kuinka paljon vapun lämpötila  $x = 0$  poikkeaa keskiarvosta  $\bar{x} = 9$ .

$$x - \bar{x} = 0 - 9 = -9 \quad 9 - 0 = 9$$

Lasketaan, kuinka moninkertainen poikkeama on keskihajontaan  $s = 5$  verrattuna.

$$\frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{-9}{5} = -1,8$$

Vapun lämpötila poikkesi keskiarvosta 1,8 keskihajonnan verran alaspäin.

Lasketaan, kuinka paljon juhannuksen lämpötila  $x = 12$  poikkeaa keskiarvosta  $\bar{x} = 20$ .

$$x - \bar{x} = 12 - 20 = -8$$

Lasketaan, kuinka moninkertainen poikkeama on keskihajontaan  $s = 4$  verrattuna.

$$\frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{-8}{4} = -2$$

Juhannuksen lämpötila poikkesi keskiarvosta 2 keskihajonnan verran alaspäin.

Juhannuksena oli ajankohtaan nähden kylmempää.

### Vastaus

vappuna 1,8 keskihajonnan verran alaspäin,  
juhannuksena 2 keskihajonnan verran alaspäin,  
ajankohtaan nähden kylmempää oli juhannuksena



# A10

a) Funktion arvo kohdassa  $-1$  on  $1$ , jos  $f(-1) = 1$ .

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 \\ a \cdot (-1) + b &= 1 \\ -a + b &= 1 & | +a \\ b &= a + 1 \end{aligned}$$

Taulukoidaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja merkitään taulukkoon alkeistapaukset, joissa  $b = a + 1$ .

	6					
	5					x
a	4				x	
	3			x		
	2		x			
	1	x				
		1	2	3	4	5
		b				

Mahdollisia alkeistapauksia (erilaisia heittotuloksia) on kaikkiaan  $6 \cdot 6 = 36$ , ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

Suotuisia alkeistapauksia on  $5$ .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{funktion arvo kohdassa } -1 \text{ on } 1) = \frac{5}{36} \approx 0,139$$

b) Funktion  $f(x) = ax + b$  nollakohta on  $x = -2$ , jos  $f(-2) = 0$ .

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ a \cdot (-2) + b &= 0 \\ -2a + b &= 0 & | +2a \\ b &= 2a \end{aligned}$$

Taulukoidaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset ja merkitään taulukkoon alkeistapaukset, joissa  $b = 2a$ .

	6						
	5						
a	4						
	3						x
	2				x		
	1		x				
		1	2	3	4	5	6
		b					

Suotuisia alkeistapauksia on 3.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{funktion nollakohta on } x = -2) = \frac{3}{36} = 0,0833$$

**Vastaus**

**a)** 0,139    **b)** 0,0833

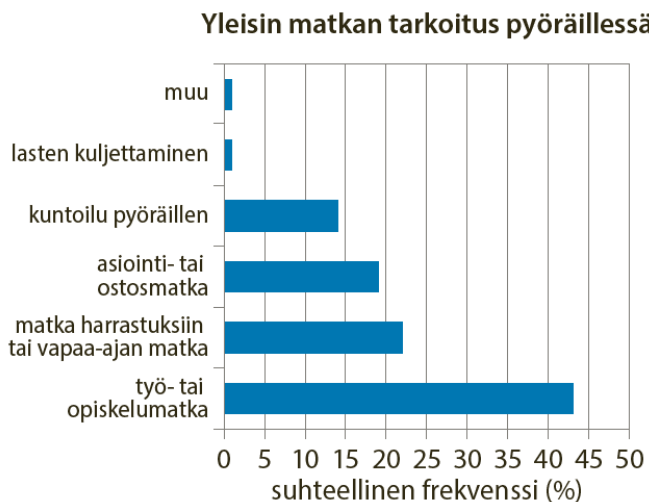
## B1

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc -ohjelmalla.

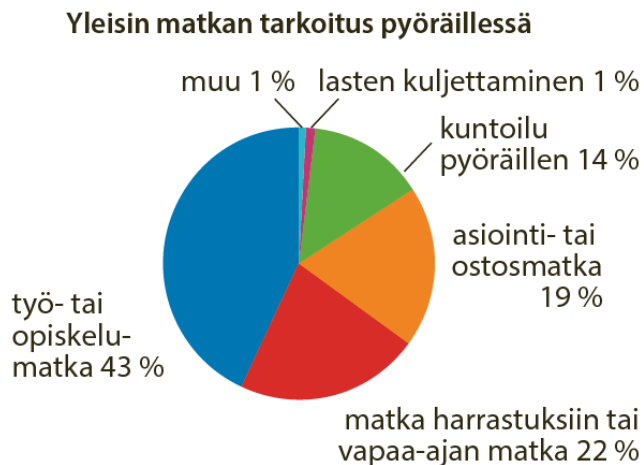
a) Syötetään tiedot sarakkeisiin A ja B.

	A	B
1	<b>Yleisin matkan tarkoitus</b>	<b>f %</b>
2	Työ- tai opiskelumatka	43
3	Matka harrastuksiin tai vapaa-ajan matka	22
4	Asiointi- tai ostosmatka	19
5	Kuntoilu pyöräillen	14
6	Lasten kuljettaminen	1
7	Muu	1
8	<b>Yhteensä</b>	<b>41,4</b>

Piirretään vaakapylväskuvio (palkki) Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



b) Piirretään ympyrädiagrammi Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



## B2

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

a) Havaintoarvot ovat laskentataulukon soluissa A2–A52.

Lasketaan tunnusluvut sarakkeeseen C.

	A	B	C
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	Mediaani	'=MEDIAANI(A2:A52)
2	17	Keskiarvo	'=KESKIARVO(A2:A52)
3	18	Keskihajonta	'=KESKIHAJONTA.S(A2:A52)
4	19	Moodi	'=MOODI.USEA(A\$2:A\$52)
5	20		
6	21		
7	22		

Luetaan arvot taulukosta (havaintoarvot jatkuvat riville 52 asti).

	A	B	C
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	Mediaani	22
2	17	Keskiarvo	21,7
3	18	Keskihajonta	1,9
4	19	Moodi	21
5	20		22
6	21		
7	22		

Mediaani on 22,  
moodit 21 ja 22,  
keskiarvo on 21,7 ja  
keskihajonta 1,9.

b) Kirjoitetaan sarakkeeseen B ruuvien lukumäärien mahdolliset arvot 17, 18, ..., 25.

Lasketaan sarakkeeseen näiden frekvenssit.

	A	B	C
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	<b>Ruuveja</b>	<b><math>f</math></b>
2	17	17	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B2)
3	18	18	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B3)
4	19	19	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B4)
5	20	20	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B5)
6	21	21	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B6)
7	22	22	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B7)
8	23	23	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B8)
9	24	24	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B9)
10	25	25	'=LASKE.JOS(\$A\$2:\$A\$52;B10)
11	18	<b>Yhteensä</b>	'=SUMMA(C2:C10)
12	10		

	A	B	C
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	<b>Ruuveja</b>	<b><i>f</i></b>
2	17	17	1
3	18	18	3
4	19	19	2
5	20	20	5
6	21	21	12
7	22	22	12
8	23	23	7
9	24	24	6
10	25	25	3
11	18	<b>Yhteensä</b>	51

Lasketaan seuraavaksi suhteelliset frekvenssit sarakkeeseen D.

	A	B	C	D
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	<b>Ruuveja</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>f</i> %</b>
2	17	17	1	'=C2/\$C\$11*100
3	18	18	3	'=C3/\$C\$11*100
4	19	19	2	'=C4/\$C\$11*100
5	20	20	5	'=C5/\$C\$11*100
6	21	21	12	'=C6/\$C\$11*100
7	22	22	12	'=C7/\$C\$11*100
8	23	23	7	'=C8/\$C\$11*100
9	24	24	6	'=C9/\$C\$11*100
10	25	25	3	'=C10/\$C\$11*100
11	18	<b>Yhteensä</b>	<b>51</b>	'=SUMMA(D2:D10)

	A	B	C	D
1	<b>Ruuveja pussissa</b>	<b>Ruuveja</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>f</i> %</b>
2	17	17	1	2,0
3	18	18	3	5,9
4	19	19	2	3,9
5	20	20	5	9,8
6	21	21	12	23,5
7	22	22	12	23,5
8	23	23	7	13,7
9	24	24	6	11,8
10	25	25	3	5,9
11	18	<b>Yhteensä</b>	<b>51</b>	<b>100,0</b>

Absoluuttinen jakauma on sarakkeessa C ja suhteellinen jakauma sarakkeessa D.

### Vastaus

a) mediaani 22, moodit 21 ja 22, keskiarvo 21,7; keskihajonta 1,9

## B3

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

- a) Syötetään annetut tiedot sarakkeisiin A ja B.  
Lasketaan summafrekvenssit sarakkeeseen C.

Kirjoitetaan laskukaava soluun C3 ja kopioidaan kaavaa alaspäin.

	A	B	C
1	<b>Käyntitiheys</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>
2	harvemmin kuin kerran vuodessa	11	'=B2
3	muutaman kerran vuodessa	32	'=B3+C2
4	kerran kuukaudessa	84	'=C3+B4
5	pari kertaa kuukaudessa	58	'=C4+B5
6	kerran viikossa	51	'=C5+B6
7	vähintään kahdesti viikossa	12	'=C6+B7

	A	B	C
1	<b>Käyntitiheys</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>
2	harvemmin kuin kerran vuodessa	11	11
3	muutaman kerran vuodessa	32	43
4	kerran kuukaudessa	84	127
5	pari kertaa kuukaudessa	58	185
6	kerran viikossa	51	236
7	vähintään kahdesti viikossa	12	248

Lasketaan seuraavaksi suhteelliset summafrekvenssit sarakkeeseen D.

Kirjoitetaan laskukaava soluun D23 ja kopioidaan kaavaa alaspäin.

	A	B	C	D
1	<b>Käyntitiheys</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>	<b><i>sf %</i></b>
2	harvemmin kuin kerran vuodessa	11	11	'=C2/\$C\$7*100
3	muutaman kerran vuodessa	32	43	'=C3/\$C\$7*100
4	kerran kuukaudessa	84	127	'=C4/\$C\$7*100
5	pari kertaa kuukaudessa	58	185	'=C5/\$C\$7*100
6	kerran viikossa	51	236	'=C6/\$C\$7*100
7	vähintään kahdesti viikossa	12	248	'=C7/\$C\$7*100

	A	B	C	D
1	<b>Käyntitiheys</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>sf</i></b>	<b><i>sf %</i></b>
2	harvemmin kuin kerran vuodessa	11	11	4,4
3	muutaman kerran vuodessa	32	43	17,3
4	kerran kuukaudessa	84	127	51,2
5	pari kertaa kuukaudessa	58	185	74,6
6	kerran viikossa	51	236	95,2
7	vähintään kahdesti viikossa	12	248	100,0

Taulukko suhteellisista summafrekvensseistä:

<b>Käyntitiheys</b>	<b><i>sf %</i></b>
harvemmin kuin kerran vuodessa	4,4
muutaman kerran vuodessa	17,3
kerran kuukaudessa	51,2
pari kertaa kuukaudessa	74,6
kerran viikossa	95,2
vähintään kahdesti viikossa	100,0

- b) 50 %:n raja ylittyy luokassa ”kerran kuukaudessa”. Mediaaniluokka on siis ”kerran kuukaudessa”.

Suurin frekvenssi on luokassa ”kerran kuukaudessa”. Moodiluokka on siis ”kerran kuukaudessa”.

- c) 75 %:n raja ylittyy luokassa ”kerran viikossa”. Elokuissa tiheimmin käyvä 25 % käy siis elokuissa vähintään kerran viikossa.

### Vastaus

- b) mediaaniluokka ”kerran kuukaudessa”,  
moodiluokka ”kerran kuukaudessa”  
c) vähintään kerran viikossa

## B4

Tapahtuman ”ainakin yksi törmää ilmakehään Suomen yläpuolella” vastatapahtuma on ”yksikään ei törmää ilmakehään Suomen yläpuolella”.

Meteoriitti törmää ilmakehään Suomen yläpuolella todennäköisyydellä  $\frac{340\,000}{510\,000\,000} = \frac{1}{1500}$ .

Näin ollen meteoriitti ei törmää ilmakehään Suomen yläpuolella todennäköisyydellä

$$1 - \frac{1}{1500} = \frac{1499}{1500}.$$

Lasketaan vastatapahtuman ”yksikään ei törmää ilmakehään Suomen yläpuolella” todennäköisyys.

$P(\text{yksikään meteoriitti ei törmää Suomen yläpuolella})$

$= P(1. \text{ ei ja } 2. \text{ ei ja } \dots \text{ ja } 140. \text{ ei})$

$= P(1. \text{ ei}) \cdot P(2. \text{ ei}) \cdot \dots \cdot P(140. \text{ ei})$

$$= \underbrace{\frac{1499}{1500} \cdot \frac{1499}{1500} \cdot \dots \cdot \frac{1499}{1500}}_{140 \text{ kappaletta}}$$

$$= \frac{1499^{140}}{1500}$$

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi törmää ilmakehään Suomen yläpuolella” todennäköisyys.

$P(\text{ainakin yksi}) = 1 - P(\text{ei yksikään})$

$$= 1 - \frac{1499^{140}}{1500}$$

$$\approx 0,891$$

**Vastaus**

0,891



## B5

a) 6 lukiolaisen joukosta voidaan 2 lukiolaista valita

$$\binom{6}{2} = 15 \text{ tavalla.}$$

4 peruskoululaisen joukosta voidaan 1 peruskoululainen valita

$$\binom{4}{1} = 4 \text{ tavalla.}$$

Tuloperiaatteen mukaan toimikunta, jossa on 2 lukiolaista ja 1 peruskoululainen, voidaan valita

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 60 \text{ tavalla.}$$

b) Toimikunnassa on sekä lukiolaisia että peruskoululaisia, jos siinä on 2 lukiolaista ja 1 peruskoululainen tai 1 lukiolainen ja 2 peruskoululaista.

2 lukiolaista ja 1 peruskoululainen voidaan valita

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 60 \text{ tavalla.}$$

1 lukiolainen ja 2 peruskoululaista voidaan valita

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} = 36 \text{ tavalla.}$$

Toimikunta voidaan siis muodostaa

$$60 + 36 = 96 \text{ tavalla}$$

### Vastaus

a) 60

b) 96

## B6

Oletetaan, että henkilön molemmat silmät ovat samanväriset, eli esimerkiksi tapahtumat ”siniset silmät” ja ”ruskeat silmät” ovat erilliset.

- a) Tapahtuma ”kahdella asukkaalla on sama silmien väri” muodostuu neljästä erillisestä tapahtumasta:

”R R”, ”S S”, ”H H” tai ”V V”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{sama silmien väri}) &= P(R R) + P(S S) + P(H H) + P(V V) \\ &= P(R) \cdot P(R) + P(S) \cdot P(S) + P(H) \cdot P(H) + P(V) \cdot P(V) \\ &= 0,52 \cdot 0,52 + 0,31 \cdot 0,31 + 0,12 \cdot 0,12 + 0,05 \cdot 0,05 \\ &\approx 0,38 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuman ”eri silmien väri” vastatapahtuma on ”sama silmien väri”.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{eri silmien väri}) &= 1 - P(\text{sama silmien väri}) \\ &\approx 1 - 0,38 \\ &\approx 0,62 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 0,38

b) 0,62

## B7

- a) Yksittäisen heiton tulos on riippumaton aiempien heittojen tuloksista. Heitolla saadaan vähintään viitonen, jos silmäluku on 5 tai 6.

Lasketaan tapahtuman ”vähintään viitonen” todennäköisyys.

$$P(\text{vähintään viitonen}) = \frac{2}{6} \approx 0,333$$

- b) Tapahtuma ”seuraavalla heitolla saadaan aina yhtä suurempi silmäluku kuin edellisellä heitolla” muodostuu neljästä erillisestä tapahtumasta:

”1 2 3”, ”2 3 4”, ”3 4 5” ja ”4 5 6”.

Yksittäisen heittotuloksen todennäköisyys on aina  $\frac{1}{6}$ . Siten esimerkiksi tapahtuman ”1 2 3”

$$\text{todennäköisyys on } P(1\ 2\ 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}^3.$$

Sama todennäköisyys pätee myös kolmelle muulle heittosarjalle.

Lasketaan tapahtuman ”seuraavalla heitolla saadaan aina yhtä suurempi silmäluku kuin edellisellä heitolla” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{seuraavalla heitolla yhtä suurempi kuin edellisellä}) \\ &= P(1\ 2\ 3) + P(2\ 3\ 4) + P(3\ 4\ 5) + P(4\ 5\ 6) \\ &= \frac{1}{6}^3 + \frac{1}{6}^3 + \frac{1}{6}^3 + \frac{1}{6}^3 \\ &\approx 0,0185 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 0,333   b) 0,0185

## B8

Tapahtuma ”saa ainakin 9 pistettä” muodostuu kolmesta erillisestä tapahtumasta:

”saadaan 5 ja 5”

”saadaan 4 ja 5”

”saadaan 5 ja 4”

Yksittäisellä laukauksella pistemäärien 4 ja 5 todennäköisyydet ovat

$$P(4) = \frac{153}{400} \text{ ja } P(5) = \frac{85}{400}.$$

Lasketaan tapahtuman "ainakin 9 pistettä" todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{saa ainakin 9 pistettä}) \\ &= P(5 \text{ ja } 5 \text{ tai } 4 \text{ ja } 5 \text{ tai } 5 \text{ ja } 4) \\ &= P(5 \text{ ja } 5) + P(4 \text{ ja } 5) + P(5 \text{ ja } 4) \\ &= P(5) \cdot P(5) + P(4) \cdot P(5) + P(5) \cdot P(4) \\ &= \frac{85}{400} \cdot \frac{85}{400} + \frac{153}{400} \cdot \frac{85}{400} + \frac{85}{400} \cdot \frac{153}{400} \\ &\approx 0,208 \end{aligned}$$

**Vastaus**

0,208

## B9

- a) Luokan 30–34 suhteellinen frekvenssi on suurin, joten moodiluokka on 30–34.

Käytetään keskiarvon määrittämiseen GeoGebran taulukkolaskentaohjelmaa.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A ikäluokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset. Kirjoitetaan sarakkeeseen E suhteelliset frekvenssit.

	A	B	C	D	E
1	Äidin ikä (v)	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f %
2	15-19	15	20	17.5	1.21
3	20-24	20	25	22.5	10.55
4	25-29	25	30	27.5	28.47
5	30-34	30	35	32.5	34.89
6	35-39	35	40	37.5	20.02
7	40-44	40	45	42.5	4.55
8	45-49	45	50	47.5	0.3
9	50-54	50	55	52.5	0.02

Määritetään keskiarvo sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

n	100.01
Keskiarvo	31.3451
$\sigma$	5.4188
s	5.4461
$\Sigma x$	3134.825
$\Sigma x^2$	101198.0625
Min	17.5
Q1	27.5
Mediaani	32.5
Q3	35
Max	52.5

Synnyttäjien iän keskiarvo on 31,3 vuotta.

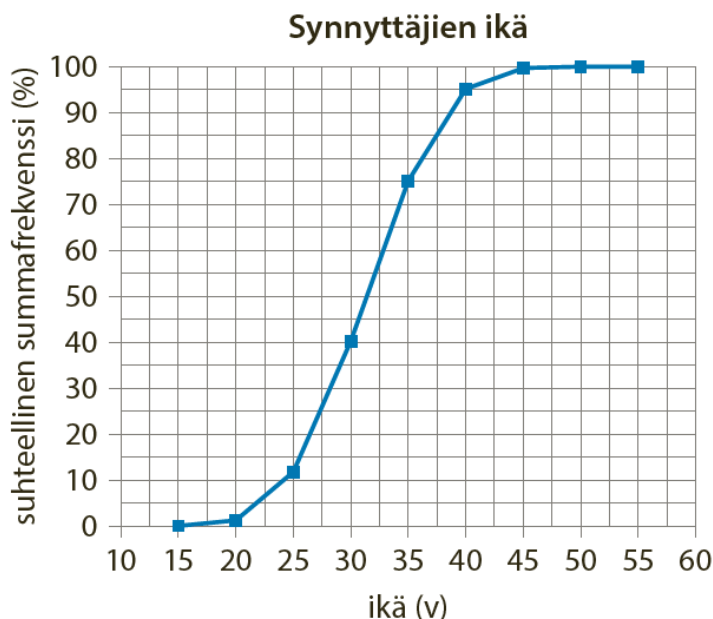
- b) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Syötetään tarvittavat tiedot sarakkeisiin A–C ja lasketaan suhteelliset summafrekvenssit sarakkeeseen D.

	A	B	C	D
1	Äidin ikä (v)	f %	Todellinen yläraja	sf %
2			15	0
3	15-19	1,21	20	'=D2+B3
4	20-24	10,55	25	'=D3+B4
5	25-29	28,47	30	'=D4+B5
6	30-34	34,89	35	'=D5+B6
7	35-39	20,02	40	'=D6+B7
8	40-44	4,55	45	'=D7+B8
9	45-49	0,30	50	'=D8+B9
10	50-54	0,02	55	'=D9+B10

	A	B	C	D
1	Äidin ikä (v)	f %	Todellinen yläraja	sf %
2			15	0,0
3	15-19	1,21	20	1,2
4	20-24	10,55	25	11,8
5	25-29	28,47	30	40,2
6	30-34	34,89	35	75,1
7	35-39	20,02	40	95,1
8	40-44	4,55	45	99,7
9	45-49	0,30	50	100,0
10	50-54	0,02	55	100,0

Piirretään kertymäkuvaaja Ohjattu kaavion luonti -toimintoa käyttäen.



Arvioidaan ikä, jota nuorempia oli 25 % synnyttäjistä. Kuvaaja ylittää 25 %:n rajan noin 27 ikävuoden kohdalla.

Nuorimmat 25 % synnyttäjistä olivat alle 27-vuotiaita.

### Vastaus

- a) moodiluokka 30–34 vuotta, keskiarvo 31,4 vuotta  
b) Nuorimmat 25 % synnyttäjistä olivat alle 27-vuotiaita.

## B10

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

a) Avataan aineisto ja määritetään tunnusluvut miesten ja naisten eliniänodotteille.

### Miehet:

n	49
Keskiarvo	72.841
$\sigma$	3.7987
s	3.8381
$\Sigma x$	3569.21
$\Sigma x^2$	260691.9905
Min	65.89
Q1	70.11
Mediaani	72.82
Q3	76.08
Max	79.16

Miesten elinajanodotteen keskiarvo on 72,8 vuotta ja keskihajonta 3,8 vuotta.

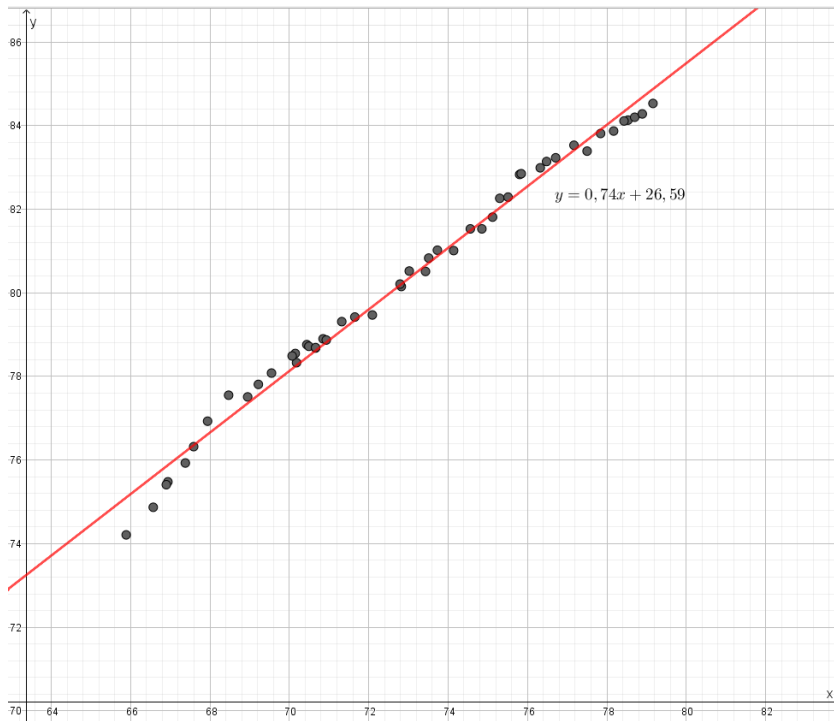
### Naiset:

n	49
Keskiarvo	80.2214
$\sigma$	2.8119
s	2.841
$\Sigma x$	3930.85
$\Sigma x^2$	315725.8375
Min	74.21
Q1	78.41
Mediaani	80.21
Q3	82.92
Max	84.53

Naisten elinajanodotteen keskiarvo on 80,2 vuotta ja keskihajonta 2,8 vuotta.

b) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla. Valitaan selittäväksi muuttujaksi  $x$  miesten elinajanodote ja selitettäväksi muuttujaksi  $y$  naisten elinajanodote.

Piirretään hajontakuvio ja määritetään regressiosuoran yhtälö sekä korrelaatiokerroin.



Regressiosuoran yhtälö on  $y = 0,74x + 26,59$ .

KeskiarvoX	72.841
KeskiarvoY	80.2214
Sx	3.8381
Sy	2.841
r	0.9946
p	0.9981
Sxx	707.092
VarianssiY	387.435
Sxy	520.5729
R <sup>2</sup>	0.9892
SSE	4.1806

Korrelaatiokerroin  $r \approx 0,99$

Hajontakuvion ja korrelaatiokertoimen perusteella miesten ja naisten elinajanodotteen välillä on voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus.

- c) Todennäköisesti elinolojen ja terveydenhuollon parantuessa sekä miesten että naisten elinajanodote paranee samassa suhteessa.



- d)** Lasketaan naisten elinajanodote  $y$ , kun miesten elinajanodote  $x = 90$  (v).

$$\begin{aligned} y &= 0,74x + 26,59 && \text{Sijoitetaan } x = 90. \\ &= 0,74 \cdot 90 + 26,59 \\ &\approx 93 \text{ (v)} \end{aligned}$$

Naisten elinajanodote on 93 vuotta.

### **Vastaus**

- a)** miehet: keskiarvo 72,8 ja keskihajonta 3,8  
naiset: keskiarvo 80,2 ja keskihajonta 2,8
- b)**  $r \approx 0,99$ ;  $y = 0,74x + 26,59$ , missä  $x$  on miehen elinajanodote (v) ja  $y$  naisen elinajanodote (v), voimakas positiivinen lineaarinen riippuvuus
- c)** Todennäköisesti elinolojen ja terveydenhuollon parantuessa sekä miesten että naisten elinajanodote paranee samassa suhteessa.
- d)** 93 vuotta